

Vom Fachbereich für Mathematik und Informatik
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
genehmigte Dissertation zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

Christian Thürmann

**Minimale Anzahl von Kanten mit wenigen Kreuzungen in
geradlinigen Darstellungen des vollständigen Graphen**

7. November 2000

Referenten: Prof. Dr. H. Harborth
Prof. Dr. I. Mengersen
eingereicht am 16. August 2000

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Eigenschaften geradliniger Darstellungen	3
3	Allgemeine Abschätzungen	10
4	Untere Schranken für Darstellungen mit kleinen konvexen Hüllen	19
4.1	Dreieck als konvexe Hülle	21
4.2	Viereck als konvexe Hülle	22
4.3	Fünfeck als konvexe Hülle	23
5	Fünf Kanten mit weniger als $s + 1$ Kreuzungen	25
6	Schranken und exakte Werte für kleine n	34
6.1	Werte für $r_s(7)$	34
6.2	Werte für $r_s(8)$	35
6.3	Werte für $r_s(9)$	40
6.4	Werte für $r_s(10)$	42
6.5	Werte für $r_s(11)$	43
6.6	Zusammenfassung der bekannten Werte für $n \leq 20$ und $s \leq 10$	44
7	Schlußbemerkungen	45
A	Abbildungen	46
	Literaturverzeichnis	66

Kapitel 1

Einleitung

Ein Graph $G = (\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G))$ besteht aus einer endlichen nichtleeren Menge $\mathcal{V}(G)$, deren Elemente Knoten genannt werden, und einer Menge $\mathcal{E}(G)$, deren Elemente Kanten heißen, so daß jede Kante $e \in \mathcal{E}(G)$ einem ungeordneten Paar von Knoten (u, v) mit $u, v \in \mathcal{V}(G)$ zugeordnet ist. In einer Darstellung $D(G)$ eines Graphen G in der Euklidischen Ebene entsprechen den Knoten von G verschiedene Punkte der Ebene, welche durch Jordansche Kurvenstücke verbunden sind. Die Punkte von $D(G)$ werden auch Knoten genannt, und die Kurvenstücke werden als Kanten bezeichnet. Dabei sollen zwei Kanten höchstens einen gemeinsamen Punkt besitzen, einen Knoten oder einen Kreuzungspunkt. Mehrfachschnittpunkte und Berührungspunkte sind ausgeschlossen. Eine Darstellung eines Graphen G heißt geradlinige Darstellung $\overline{D}(G)$, falls die Knoten von G ausschließlich durch Geradensegmente verbunden sind. Eine geradlinige Darstellung eines Graphen G wird mit $\overline{D}^h(G)$ bezeichnet, wenn h Knoten auf dem Rand der konvexen Hülle von $\overline{D}(G)$ liegen.

Zwei (geradlinige) Darstellungen heißen isomorph, wenn zwischen deren Knoten, Kanten, Kreuzungen, Kantenstücken und Flächen eine eindeutig umkehrbare, die Inzidenz erhaltende Abbildung existiert.

Im Jahr 1930 bewies KURATOWSKI in [21], daß ein Graph dann und nur dann planar ist, wenn er keinen zum K_5 oder zum $K_{3,3}$ homöomorphen Teilgraphen enthält. Alle planaren Graphen lassen sich mit geradlinigen Kanten darstellen, wie Wagner 1936 in [26] und 1948 Fáry in [4] bewiesen haben. Dieses Ergebnis geht auch schon aus einer Arbeit von Steinitz [25] von 1922 hervor.

Zu Problemen, wie der Bestimmung der minimalen und der maximalen Anzahl von Kreuzungen unter allen Darstellungen eines Graphen, gibt es im allgemeinen nur Schranken.

Welche Anzahlen von Kreuzungen in Darstellungen des vollständigen Graphen möglich sind, wird etwa in [3, 9] diskutiert.

Neben dem K_n sind auch Ergebnisse über Kreuzungszahlen anderer Graphenklassen, wie etwa dem vollständig multipartiten Graphen [14, 22], dem Würfelgraphen [10] oder dem Kreisgraphen [2, 5, 13] bereits erschienen.

Schwerpunkt dieser Arbeit ist die minimale Anzahl $r_s(n)$ von Kanten mit jeweils maximal s Kreuzungen in geradlinigen Darstellungen $\overline{D}(K_n)$. Entsprechend wird $h_s(n)$ für Darstellungen $D(K_n)$ definiert.

Die Frage nach Darstellungen des vollständigen Graphen ohne kreuzungsfreie Kanten ist erstmals 1963 bei RINGEL [24] zu finden. Eine Antwort wurde 1974 von HARBORTH und Mengersen [15] gegeben. In [17] wurde bewiesen, daß $h_s(n) = 0$ für $n \geq \frac{4}{3}s + O(\sqrt{s})$ gilt, daß also für genügend großes n immer Darstellungen $D(K_n)$ existieren, in denen jede Kante mindestens $s + 1$ Kreuzungen hat.

In Kapitel 2 werden grundlegende Ergebnisse zu Anzahlen von Kreuzungen in (geradlinigen) Darstellungen des vollständigen Graphen angegeben. Insbesondere werden Abschätzungen für die maximale Anzahl von Kreuzungen in $\overline{D}^h(K_n)$ angegeben.

Kapitel 3 liefert obere Schranken für $r_s(n)$ und exakte Werte für $s \geq \frac{9}{2}n^2 + O(n)$.

Untere Schranken für $r_s(n)$ werden in Kapitel 4 bestimmt. Hier werden auch Darstellungen $\overline{D}^h(K_n)$ untersucht, in denen die konvexe Hülle ein h -Eck mit $h \leq 5$ ist.

Für $n \geq 5$ kann der Wert 5 für $r_s(n)$ nicht unterschritten werden, es gilt also $r_s(n) \geq 5$. Mit Hilfe einer Konstruktion von $\overline{D}(K_n)$ wird in Kapitel 5 gezeigt, daß zu jedem s für $n \geq \frac{5}{3}s^2 + O(s)$ Darstellungen $\overline{D}^5(K_n)$ existieren, in denen nur die fünf Kanten auf dem Rand der konvexen Hülle weniger als $s + 1$ Kreuzungen besitzen.

Schließlich werden in Kapitel 6 exakte Werte von $r_s(n)$ für kleine n bewiesen. Für alle $s \leq 10$ und $n \leq 20$ werden in Tabelle 1 außerdem obere Schranken für $r_s(n)$ angegeben.

Im Anhang A sind Darstellungen $\overline{D}(K_n)$ zusammengefaßt, die die oberen Schranken für die Werte in Tabelle 1 nachweisen.

Kapitel 2

Eigenschaften geradliniger Darstellungen

Die Menge aller geradlinigen Darstellungen $\overline{D}(G)$ eines Graphen G ist in der Menge aller Darstellungen $D(G)$ enthalten. Also gilt für die Anzahlen $C(K_n)$ und $\overline{C}(K_n)$ von nicht-isomorphen Darstellungen $D(K_n)$ beziehungsweise geradlinigen Darstellungen $\overline{D}(K_n)$

$$C(K_n) \geq \overline{C}(K_n), \quad (2.1)$$

mit Gleichheit für $n \leq 4$. Für vollständige Graphen K_n sind $C(K_n)$ und $\overline{C}(K_n)$ bisher nur für $n \leq 6$ bekannt [6, 11, 18, 23]. Es gilt $C(K_n) = 1, 2, 5, 121$ und $\overline{C}(K_n) = 1, 2, 3, 15$ für $n = 3, 4, 5, 6$ (siehe Abbildung 2.1).

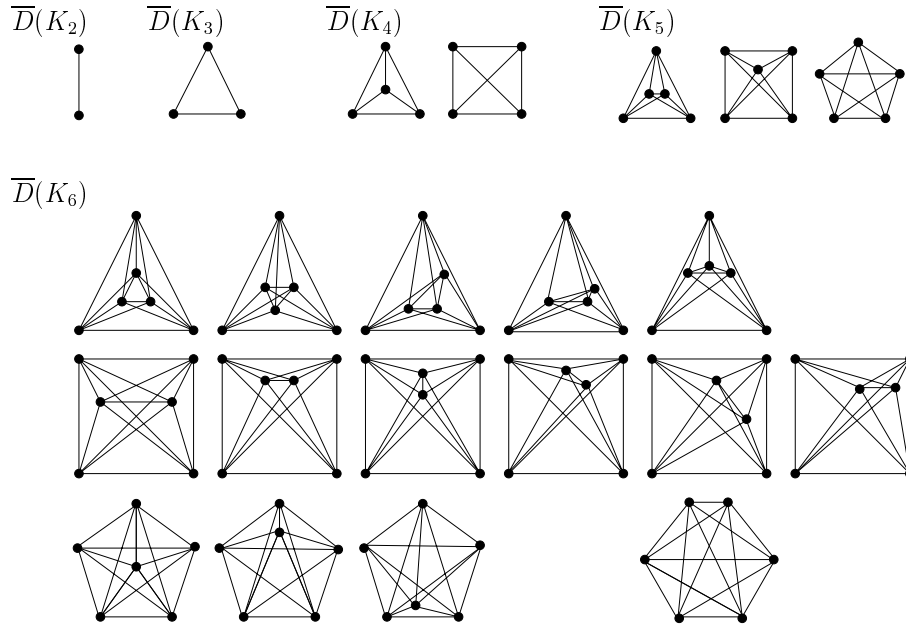


Abbildung 2.1. Alle geradlinigen Darstellungen des K_n für $2 \leq n \leq 6$.

Für die minimalen Anzahlen $cr(K_n)$ und $\overline{cr}(K_n)$ von Kreuzungen unter allen Darstellungen $D(K_n)$ und $\overline{D}(K_n)$ sind bisher nur die oberen Schranken von GUY [1, 3, 7]

$$cr(K_n) \leq \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor,$$

mit Gleichheit für $n \leq 10$, und von JENSEN [19]

$$\overline{cr}(K_n) \leq \left\lfloor \frac{7n^4 - 56n^3 + 128n^2 + 48n \lfloor \frac{n-7}{3} \rfloor + 108}{432} \right\rfloor$$

bekannt. Die unteren Schranken

$$cr(K_n) \geq \frac{1}{80}n(n-1)(n-2)(n-3) \quad \text{für } n \geq 11$$

und

$$cr(K_n) \geq \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-6}{2} \right\rfloor \frac{\binom{n}{5}}{\binom{n-4}{3}}$$

stammen von KLEITMANN [3, 20] beziehungsweise von GUY [8]. Wegen (2.1) gilt

$$\overline{cr}(K_n) \geq cr(K_n).$$

Nach RINGEL [24] ist die maximale Anzahl $CR(K_n)$ von Kreuzungen in Darstellungen des vollständigen Graphen

$$CR(K_n) = \binom{n}{4}. \quad (2.2)$$

Eine geradlinige Darstellung des K_n besitzt ebenfalls maximal $\binom{n}{4}$ Kreuzungen und zwar genau dann, wenn die Knoten ein konvexes n -Eck bilden, weil nur in diesem Fall je vier Knoten eine Kreuzung erzeugen. Es gilt also

$$\overline{CR}(K_n) = CR(K_n).$$

Darstellungen $\overline{D}^h(K_n)$ mit $h < n$ haben also weniger als $\binom{n}{4}$ Kreuzungen. Für die maximale Anzahl $\overline{CR}^h(K_n)$ von Kreuzungen in $\overline{D}^h(K_n)$ folgt aus den Ergebnissen in [3, 9], daß für $h < n$ gilt $\overline{CR}^h(K_n) \leq \binom{n}{4} - (n-3)$. Hier wird die Gleichheit nur im Fall $h = n-1$ angenommen.

Eine schärfere obere Schranke für $\overline{CR}^h(K_n)$ wird im folgenden Satz angegeben.

Satz 1. Es gilt $\overline{CR}^h(K_n) \leq \binom{n}{4} - (h-2)(n-h) - 2\binom{n-h}{2}$.

Beweis. Jeder der $n-h$ Knoten w_i innerhalb des h -Ecks H liegt in mindestens $h-2$ Dreiecken $v_i v_j v_k$, wobei v_i, v_j und v_k Knoten des h -Ecks sind. Diese konkaven Vierecke bestimmen also keine Kreuzung.

Die Kanten von H und die Kanten von einem inneren Knoten w_l zu allen Knoten von H teilen das h -Eck in Dreiecke, so daß jeder weitere innere Knoten w_m mit w_l und zwei

aufeinanderfolgenden Knoten auf H ein konkaves Viereck bildet. Insgesamt enthält also $\overline{D}^h(K_n)$ für $h \leq n - 2$ mindestens $2\binom{n-h}{2}$ weitere Vierecke, die keine Kreuzung erzeugen.

Durch Subtraktion der Mindestanzahlen konkaver Vierecke von $\overline{CR}(K_n)$ ergibt sich die Behauptung. \square

In Satz 2 wird $\overline{CR}^h(K_n)$ nach unten abgeschätzt.

Satz 2. Es gilt

$$\overline{CR}^h(K_n) \geq \binom{n}{4} - \frac{(r+1)(6n(n-r-3) - h(3n-4r-9)(r+2))}{6}$$

mit $r = \lfloor \frac{n-h}{h} \rfloor$.

Beweis. Zum Beweis der Abschätzung wird die folgende Konstruktion von $\overline{D}^h(K_n)$ betrachtet. Zunächst werden die Knoten v_1, v_2, \dots, v_h als reguläres h -Eck H in die Ebene gezeichnet. Die Darstellung des vollständigen Teilgraphen der Knoten v_i mit $i = 1, 2, \dots, h$ und allen Kanten (v_i, v_j) hat h Randdreiecke, die von Kantensegmenten der Kanten (v_{i-1}, v_{i+1}) , (v_i, v_{i+2}) und der Kante (v_i, v_{i+1}) berandet werden. Die Knoten w_1, w_2, \dots, w_{n-h} innerhalb des h -Ecks werden so gleichmäßig wie möglich auf diese Randdreiecke aufgeteilt. Dann gilt für die Anzahl γ_1 der Dreiecke, in denen $r = \lfloor \frac{n-h}{h} \rfloor$ Knoten liegen, und die Anzahl γ_2 von Dreiecken, in denen sich $r+1 = \lfloor \frac{n-h}{h} \rfloor + 1$ Knoten befinden mit $\gamma_1 + \gamma_2 = h$

$$n - h = \gamma_1 r + \gamma_2 (r + 1) = hr - \gamma_2 r + \gamma_2 r + \gamma_2,$$

also

$$\gamma_2 = n - h(r + 1).$$

Daraus folgt

$$\gamma_1 = h - \gamma_2 = h - (n - hr - h) = h(r + 2) - n.$$

Die Knoten w_1, w_2, \dots, w_{n-h} werden so auf die Kreislinie des Inkreises des h -Ecks gezeichnet, daß sie für $1 \leq i \leq h - 1$ dicht an den Kanten (v_i, v_{i+1}) auf einer Seite des Berührungspunktes liegen (siehe Abbildung 2.2). Im Fall $h \equiv 0 \pmod{2}$ werden die Knoten von H in einer ε -Umgebung verschoben, um Mehrfachkreuzungen zu vermeiden.

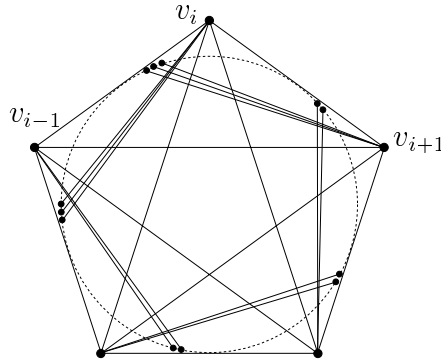


Abbildung 2.2. Konstruktion von $\overline{D}^5(K_{17})$.

Die Knoten von $\overline{D}^h(K_n)$ werden in folgende Klassen von Vierecken unterteilt:

1. $v_i v_j v_k w_l$ mit $v_i, v_j, v_k \in H$ und $w_l \notin H$,
2. $v_i v_j w_k w_l$ mit $v_i, v_j \in H$ und $w_k, w_l \notin H$,
3. $v_i w_j w_k w_l$ mit $v_i \in H$ und $w_j, w_k, w_l \notin H$,
4. $v_i v_j v_k v_l$ mit $v_i, v_j, v_k, v_l \in H$,
5. $w_i w_j w_k w_l$ mit $w_i, w_j, w_k, w_l \notin H$.

Es wird für jede der Klassen die Anzahl der konkaven Vierecke gezählt und deren Summe von der maximalen Anzahl $\overline{CR}(K_n) = \binom{n}{4}$ von Kreuzungen in $\overline{D}(K_n)$ abgezogen.

Für die Anzahl σ_1 von konkaven Vierecken $v_i v_j v_k w_l$ gilt

$$\sigma_1 = (n - h)(h - 2),$$

denn jeder der $n - h$ Knoten $w_l \notin H$ liegt innerhalb von $h - 2$ Dreiecken $v_i v_j v_k$.

Zur Bestimmung der Anzahl σ_2 von konkaven Vierecken $v_i v_j w_k w_l$ werden zum einen solche Vierecke gezählt, deren Knoten w_k und w_l in dem gleichen Randdreieck des vollständigen Teilgraphen der Knoten von H liegen. In diesem Fall bilden nur die $\gamma_1 \binom{r}{2}$ und $\gamma_2 \binom{r+1}{2}$ Knotenpaare w_k und w_l mit dem Knoten v_i , dessen Kanten zu w_k und w_l kreuzungsfrei sind, und jedem der restlichen $h - 1$ Knoten von H konkave Vierecke (siehe Abbildung 2.3).

Zum anderen wird die Anzahl der Vierecke bestimmt, in denen sich w_k und w_l in verschiedenen Randdreiecken befinden. Hier sind nur die Vierecke von zwei auf H benachbarten Knoten v_i und v_j , jedem Knoten in dem von (v_i, v_j) begrenzten Randdreieck und jeder der restlichen $n - h - r$ beziehungsweise $n - h - (r + 1)$ Knoten nicht konvex (siehe Abbildung 2.4).

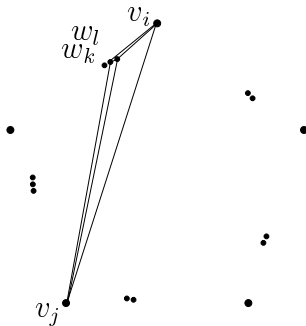


Abbildung 2.3. Ein konkaves Viereck $v_i v_j w_k w_l$ in $\overline{D}^5(K_{17})$. Die Knoten w_k und w_l liegen im gleichen Randdreieck.

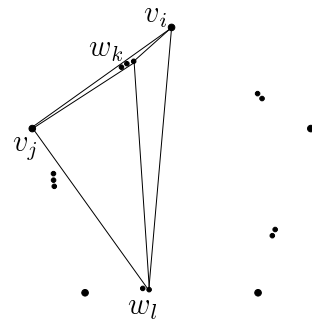


Abbildung 2.4. Ein konkaves Viereck $v_i v_j w_k w_l$ in $\overline{D}^5(K_{17})$. Die Knoten w_k und w_l liegen in verschiedenen Randdreiecken.

Damit ergibt sich

$$\sigma_2 = \gamma_1(h-1) \binom{r}{2} + \gamma_2(h-1) \binom{r+1}{2} + \gamma_1 r(n-h-r) + \gamma_2(r+1)(n-h-r-1).$$

Die Anzahl σ_3 von kreuzungsfreien Vierecken $v_i w_j w_k w_l$ wird bestimmt durch die $\gamma_1 \binom{r}{3}$ und $\gamma_2 \binom{r+1}{3}$ Vierecke, in denen sich die Knoten w_j, w_k und w_l in einem der Randdreiecke befinden und dem Knoten v_i , der zu w_j, w_k und w_l nur kreuzungsfreie Kanten besitzt (siehe Abbildung 2.5).

Hinzu kommen noch die Vierecke, in denen sich w_j und w_k in einem Randdreieck und w_l in einem anderen Randdreieck befinden. Sie bilden ein konkaves Viereck nur mit dem Knoten v_i , der zu w_j und w_k kreuzungsfreie Kanten hat (siehe Abbildung 2.6).

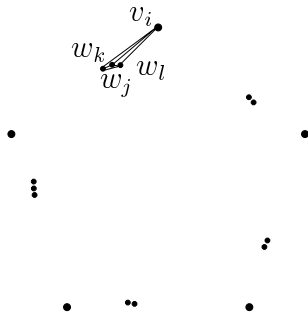


Abbildung 2.5. Ein konkaves Viereck $v_i w_j w_k w_l$ in $\overline{D}^5(K_{17})$. Die Knoten w_j, w_k und w_l liegen im gleichen Randdreieck.

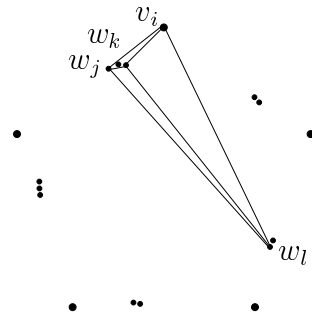


Abbildung 2.6. Ein konkaves Viereck $v_i w_j w_k w_l$ in $\overline{D}^5(K_{17})$. Die Knoten w_j, w_k und w_l liegen in zwei verschiedenen Randdreiecken.

Also gilt

$$\sigma_3 = \gamma_1 \binom{r}{3} + \gamma_2 \binom{r+1}{3} + \gamma_1 \binom{r}{2}(n-h-r) + \gamma_2 \binom{r+1}{2}(n-h-r-1).$$

Die Vierecke $v_i v_j v_k v_l$ und $w_i w_j w_k w_l$ sind alle konvex, da sowohl das h -Eck als auch die $n-h$ Knoten innerhalb von H konvexe Polygone sind.

Mit diesen drei Summanden ergibt sich folgendes Resultat.

$$\begin{aligned}
\overline{CR}^h(K_n) &\geq \binom{n}{4} - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 \\
&= \binom{n}{4} - (n-h)(h-2) \\
&\quad - \gamma_1(h-1)\binom{r}{2} - \gamma_2(h-1)\binom{r+1}{2} - \gamma_1 r(n-h-r) - \gamma_2(r+1)(n-h-r-1) \\
&\quad - \gamma_1\binom{r}{3} - \gamma_2\binom{r+1}{3} - \gamma_1\binom{r}{2}(n-h-r) - \gamma_2\binom{r+1}{2}(n-h-r-1) \\
&= \binom{n}{4} - (n-h)(h-2) - (hr+2h-n) \left(\binom{r}{3} + \binom{r}{2}(n-r-1) + r(n-h-r) \right) \\
&\quad - (n-hr-h) \left(\binom{r+1}{3} + \binom{r+1}{2}(n-r-2) + (r+1)(n-h-r-1) \right) \\
&= \binom{n}{4} - \frac{1}{6}(r+1)(18h-18n-6hn+6n^2+17hr-6nr-3hnr+4hr^2) \\
&= \binom{n}{4} - \frac{(r+1)(6n(n-r-3)-h(3n-4r-9)(r+2))}{6}
\end{aligned}$$

□

Die maximale Anzahl $E(K_n)$ von Kreuzungen auf einer Kante in $D(K_n)$ wird von HARBORTH in [10, 11] untersucht. Es gilt

$$E(K_n) = \binom{n-2}{2}.$$

Kanten mit $E(K_n)$ Kreuzungen können höchstens einmal in Darstellungen des vollständigen Graphen vorkommen [10]. Die maximale Anzahl von Kreuzungen auf einer Kante in $\overline{D}(K_n)$ wird mit $\overline{E}(K_n)$ bezeichnet und in Lemma 1 bestimmt.

Lemma 1. *Es gilt $\overline{E}(K_n) = \left\lfloor \left(\frac{n-2}{2} \right)^2 \right\rfloor$ für $n \geq 2$.*

Beweis. Die Gerade durch ein Knotenpaar teilt die Ebene in zwei Halbebenen A und B . Die Kante e dieses Knotenpaares kann nur von Kanten geschnitten werden, deren Knoten in verschiedenen Halbebenen liegen. Wenn sich a Knoten in A und b Knoten in B befinden, und jeder Knoten einer Halbebene mit den beiden Knoten von e und jedem Knoten der anderen Halbebene ein konvexes Viereck bildet, dann entstehen ab Kreuzungen auf der Kante e . Für $a+b = n-2$ Knoten ist ab maximal, wenn $a = b$ für gerade n und $a = b+1$ für ungerade

n gilt. Damit ist $ab = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ für gerade n und $ab = \left(\frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{n-3}{2}\right) = \left\lfloor \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \right\rfloor$ für ungerade n , womit das Lemma bewiesen ist.

□

Das folgende Korollar ergibt sich unmittelbar aus dem Beweis von Lemma 1.

Korollar 1. *Die Knoten einer Kante mit maximaler Anzahl von Kreuzungen liegen auf dem Rand der konvexen Hülle von $\overline{D}(K_n)$.*

Kapitel 3

Allgemeine Abschätzungen

In diesem Kapitel werden einige exakte Werte und allgemeine obere Schranken für $r_s(n)$ angegeben. Die Abbildungen in Anhang A weisen weitere obere Schranken von $r_s(n)$ für $n \leq 20$ und $s \leq 10$ nach.

Es soll bemerkt werden, daß sich die Darstellung $\overline{D}(K_n)$ einer Zeichnung eines K_n nicht ändert, wenn Knoten der Zeichnung in genügend kleinen ε -Umgebungen verschoben werden.

Wegen (2.1) gilt

$$r_s(n) \geq h_s(n) .$$

Aus der Definition von $r_s(n)$ folgt

$$r_s(n) \leq r_t(n) \quad \text{für} \quad s < t. \quad (3.1)$$

In [12] wird für $h_s(n)$ die besondere Rolle von Darstellungen $D(K_n)$ festgestellt, in denen die Knoten ein konvexes n -Eck bilden, und alle Kanten innerhalb des n -Ecks liegen.

Zwei Knoten auf dem Rand der konvexen Hülle sind durch eine Diagonale der Länge l verbunden, wenn l die kleinere Anzahl von Kanten auf dem Rand der konvexen Hülle zwischen diesen beiden Knoten ist. In dem folgenden Lemma werden die Kreuzungen auf den Diagonalen in $\overline{D}^n(K_n)$ bestimmt.

Lemma 2. Für die Anzahl $c(e_l)$ von Kreuzungen auf einer Diagonalen e_l der Länge $l = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i$ in $\overline{D}^n(K_n)$ mit $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ gilt

$$c(e_l) = \begin{cases} \frac{n^2}{4} - n + 1 - i^2 & \text{für } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{n^2}{4} - n + \frac{3}{4} - i^2 - i & \text{für } n \equiv 1 \pmod{2} . \end{cases}$$

Beweis. Eine Gerade durch die Endpunkte einer Kante teilt die Ebene in zwei Halbebenen. Wenn sich in der einen Halbebene a Knoten und in der anderen Halbebene b Knoten befinden, dann hat die Kante maximal ab Kreuzungen. Eine Gerade durch die Endpunkte einer

Diagonalen e_l der Länge $l = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i$ mit $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$ teilt die Ebene so, daß in einer Halbebene $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor - i$ Knoten und in der anderen Halbebene $\lceil \frac{n-2}{2} \rceil + i$ Knoten liegen. In $\overline{D}^n(K_n)$ wird eine Diagonale von Kanten mit Endpunkten in verschiedenen Halbebenen gekreuzt, so daß $c(e_l) = (\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor - i) (\lceil \frac{n-2}{2} \rceil + i)$, woraus das Lemma folgt. \square

Für $r_s(n)$ ergeben sich folgende Abschätzungen.

Satz 3. *Es gilt*

$$r_s(n) \leq \begin{cases} \binom{n}{2} - in - \frac{n}{2} & \text{für } n \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{und} \quad s \leq \frac{n^2}{4} - n - i^2 \\ \binom{n}{2} - (i+1)n & \text{für } n \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{und} \quad s \leq \frac{n^2-1}{4} - n - i^2 - i \end{cases}$$

mit $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor$.

Beweis. Es werden Darstellungen $\overline{D}^n(K_n)$ betrachtet. Nach Lemma 2 hat eine Diagonale der Länge $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i$ genau $(\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor - i) (\lceil \frac{n-2}{2} \rceil + i)$ Kreuzungen. Die Diagonalen kleinerer Längen haben weniger Kreuzungen. Die Anzahl der Kanten der Länge $\frac{n}{2}$ für $n \equiv 0 \pmod{2}$ ist $\frac{n}{2}$. Diagonalen anderer Längen kommen in $\overline{D}^n(K_n)$ jeweils n -mal vor. Wird nun $s \leq (\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor - i) (\lceil \frac{n-2}{2} \rceil + i)$ gewählt, so haben nur die Diagonalen der Längen $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i + 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i + 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ jeweils mehr als s Kreuzungen. Die Anzahl dieser Kanten ist von der Anzahl aller Kanten abzuziehen, und der Satz ist bewiesen. \square

Mit $\overline{M}(K_n)$ wird die maximale Anzahl von Kanten bezeichnet, die die größtmögliche Anzahl $\overline{E}(K_n)$ von Kreuzungen auf einer Kante unter allen Darstellungen $\overline{D}(K_n)$ besitzen.

Lemma 3. Für $n \geq 2$ gilt $\overline{M}(K_n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n & \text{für } n \equiv 0 \pmod{2} \\ n & \text{für } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$.

Beweis. Die in Lemma 1 bestimmte maximale Anzahl $\overline{E}(K_n)$ von Kreuzungen kommt auf den längsten Diagonalen in $\overline{D}^n(K_n)$ vor.

Angenommen, es gibt eine Darstellung mit mehr Kanten mit $\overline{E}(K_n)$ Kreuzungen als in Lemma 3 behauptet.

$n \equiv 0 \pmod{2}$: Aus dem Schubfachprinzip folgt, daß von mindestens einem Knoten v mindestens zwei Kanten mit $\overline{E}(K_n)$ Kreuzungen ausgehen, etwa zu den Knoten v_1 und v_2 . Die beiden Geraden, die von v und v_1 beziehungsweise v und v_2 bestimmt werden, erzeugen jeweils zwei Halbebenen. In jeder dieser vier Halbebenen liegen nach dem Beweis von Lemma 1 genau $\frac{n-2}{2}$ Knoten. Werden die Anzahlen von Knoten in den Winkelbereichen A, B, C beziehungsweise D (siehe Abbildung 3.1) mit a, b, c beziehungsweise d bezeichnet, so folgt

$$1 + a + c = \frac{n-2}{2} = c + d.$$

Damit liegt wegen $d = a + 1 \geq 1$ mindestens ein Knoten in D . Dies ist ein Widerspruch zur Aussage von Korollar 1, da v dann kein Knoten auf dem Rand der konvexen Hülle ist.

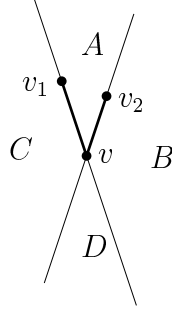


Abbildung 3.1.

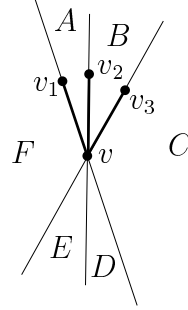


Abbildung 3.2.

$n \equiv 1 \pmod{2}$: Mehr als n Kanten mit $\overline{E}(K_n)$ Kreuzungen bestimmen mindestens $2n + 2$ Endpunkte. Dann gibt es nach dem Schubfachprinzip mindestens einen Knoten v , der mit drei Kanten inzidiert, die jeweils $\overline{E}(K_n)$ Kreuzungen haben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind dies die Kanten (v, v_1) , (v, v_2) und (v, v_3) . Wegen Korollar 1 bilden die Knoten v, v_1, v_2 und v_3 ein konvexes Viereck. Die drei Geraden, die von v und v_i für $i = 1, 2, 3$ bestimmt werden, erzeugen die Winkelbereiche A, B, C, D, E und F (siehe Abbildung 3.2). Nach Korollar 1 befinden sich in D und E keine Knoten, da sonst v nicht Knoten auf dem Rand der konvexen Hülle wäre. Die Kanten (v, v_1) und (v, v_3) haben also nur dann $\overline{E}(K_n)$ Kreuzungen, wenn in den Winkelbereichen F und C jeweils mindestens $\frac{n-3}{2}$ Knoten liegen (siehe Lemma 2 für ungerades n und $i = 0$). Dann ergibt sich der Widerspruch, daß die Darstellung mindestens $2\frac{n-3}{2} + 4 = n + 1$ Knoten hat.

□

Aus Lemma 1 und Lemma 3 folgt für $\overline{D}(K_n)$

$$r_s(n) = \binom{n}{2} \quad \text{für } s \geq \overline{E}(K_n) \quad (3.2)$$

und

$$r_s(n) = \binom{n}{2} - \begin{cases} \frac{1}{2}n & \text{für } n \equiv 0 \pmod{2} \\ n & \text{für } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad \text{und } s = \overline{E}(K_n) - 1. \quad (3.3)$$

Weitere exakte Werte für kleinere Werte von s werden in den folgenden Sätzen nachgewiesen.

Zunächst wird eine obere Schranke für die maximale Anzahl S von Kreuzungen auf zwei Kanten (v, v_1) und (v, v_2) angegeben, wobei v in dem Dreieck $v_1 v_2 v_3$ liegt. Der Knoten v bestimmt mit v_2 beziehungsweise v_3 jeweils eine Gerade. Diese beiden Geraden erzeugen vier Winkelbereiche A, B, C und D (siehe Abbildung 3.3).

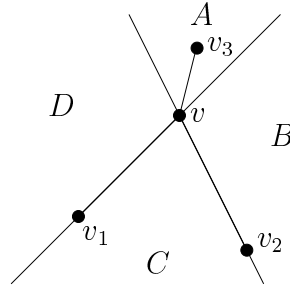


Abbildung 3.3.

In A liegt mit v_3 mindestens ein Knoten. Mit x wird die Anzahl aller Knoten außer v_3 in A , B und D bezeichnet. Also liegen $n - x - 4$ Knoten in C .

Jede Kante von einem der $n - x - 4$ Knoten aus C zu einem der $x + 1$ Knoten aus $A \cup B \cup D$ schneidet eine der beiden Kanten (v, v_1) oder (v, v_2) . Maximal x Kanten von v_1 und v_2 zu den Knoten in $A \cup B \cup D$ kreuzen (v, v_1) und (v, v_2) . Schließlich erzeugen die Kanten zwischen zwei Knoten aus $A \cup B \cup D$ höchstens $2 \left(\frac{x}{2}\right)^2$ Kreuzungen auf (v, v_1) und (v, v_2) . Zusammen ergibt sich

$$S \leq (n - x - 4)(x + 1) + x + 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{2} - 3n + 4 - \frac{1}{2}(x - (n - 4))^2. \quad (3.4)$$

Diese Abschätzung für S wird maximal, wenn $(x - (n - 4))^2$ minimal ist. Also muß x möglichst groß sein, weil $x \leq n - 4$ gilt.

Mit Hilfe der Abschätzung (3.4) kann in den beiden folgenden Sätzen die Gleichheit in Satz 3 für das erste Drittel der Werte von i bewiesen werden.

Satz 4. Für gerades n gilt

$$r_s(n) = \binom{n}{2} - \frac{n}{2} - in$$

für $\overline{E}(K_n) - i^2 - 2i - 1 \leq s \leq \overline{E}(K_n) - i^2 - 1$ mit $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n-4}{6} \rfloor$.

Beweis. Aus Satz 3 ergibt sich der behauptete Term als obere Schranke.

Zum Beweis, daß dieser Term auch untere Schranke ist, wird angenommen, daß eine Darstellung existiert, in der mehr als $\frac{n}{2} + in$ Kanten jeweils mindestens $\overline{E}(K_n) - i^2 - 2i = \frac{n^2}{4} - n - i^2 - 2i + 1$ Kreuzungen haben. Diese Kanten haben mindestens $2 \left(\frac{n}{2} + in + 1\right)$ Endpunkte, also gibt es in $\overline{D}(K_n)$ mindestens einen Knoten v , der mit $\left\lceil \frac{2(\frac{n}{2} + in + 1)}{n} \right\rceil = 2i + 2$

Kanten inzidiert, die jeweils mindestens $\frac{n^2}{4} - n - i^2 - 2i + 1$ Kreuzungen haben.

Dieser Knoten liegt entweder außerhalb oder innerhalb der konvexen Hülle der $2i + 2$ Knoten.

Fall 1: Der Knoten v liegt außerhalb der konvexen Hülle der $2i + 2$ Knoten.

Mit v_1 und v_2 werden die beiden der $2i + 2$ Knoten bezeichnet, die mit v zwei Geraden g und g' bestimmen, so daß in einem Winkelbereich alle restlichen $2i$ Knoten liegen (siehe Abbildung 3.4).

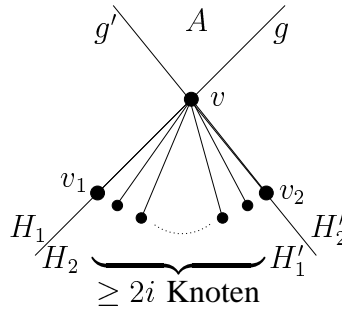


Abbildung 3.4.

Die Gerade g bestimmt die beiden Halbebenen H_1 und H_2 . Somit kann (v, v_1) mindestens $\frac{n^2}{4} - n - i^2 - 2i + 1$ Kreuzungen nur dann haben, wenn in beiden Halbebenen mehr als $\frac{n}{2} - i - 1$ Knoten liegen, da sonst (v, v_1) maximal $\left(\frac{n}{2} - i - r\right) \left(n - 2 - \left(\frac{n}{2} - i - r\right)\right) = \frac{n^2}{4} - n - i^2 + 2i - r(2i - 2 + r)$ Kreuzungen, also für $r \geq 2$ höchstens $\frac{n^2}{4} - n - i^2 - 2i$ Kreuzungen hat.

Analog wird gezeigt, daß in den von g' bestimmten Halbebenen H'_1 und H'_2 ebenfalls mindestens $\frac{n}{2} - i - 1$ Knoten liegen müssen, damit (v, v_2) ausreichend Kreuzungen hat.

In dem Winkelbereich $A = H_1 \cap H'_2$ muß nun mindestens ein Knoten liegen, da sich sonst in H_1 und H'_2 jeweils mindestens $\frac{n}{2} - i - 1$ Knoten befinden, und diese zusammen mit v und den $2i + 2$ Knoten mindestens $2\left(\frac{n}{2} - i - 1\right) + 1 + 2i + 2 = n + 1$, also mehr als n Knoten ergeben.

In $H'_1 \cap H_2$ liegen mindestens $2i$ Knoten. Da ein Knoten in A gesichert ist, gilt $x \leq n - 4 - 2i$ für x in (3.4). Die Kanten (v, v_1) und (v, v_2) haben dann nach (3.4) zusammen maximal S Kreuzungen mit

$$S \leq \frac{n^2}{2} - 3n + 4 - \frac{1}{2}(n - 4 - 2i - (n - 4))^2 = \frac{n^2}{2} - 3n - 2i^2 + 4,$$

so daß $S < 2\left(\frac{n^2}{4} - n - i^2 - 2i + 1\right) = \frac{n^2}{2} - 2n - 2i^2 - 4i + 2$ für $n > 4i + 2$ gilt. Daher hat (v, v_1) oder (v, v_2) weniger als $\frac{n^2}{4} - n - i^2 - 2i + 1$ Kreuzungen.

Fall 2: Der Knoten v liegt innerhalb der konvexen Hülle der $2i + 2$ Knoten.

Es gibt also drei Knoten v_1, v_2 und v_3 von den $2i + 2$ Knoten, so daß sich v in dem Dreieck $v_1 v_2 v_3$ befindet (siehe Abbildung 3.5). Die drei Halbgeraden, die bei v beginnen und durch v_1, v_2 und v_3 gehen, erzeugen drei Winkelbereiche.

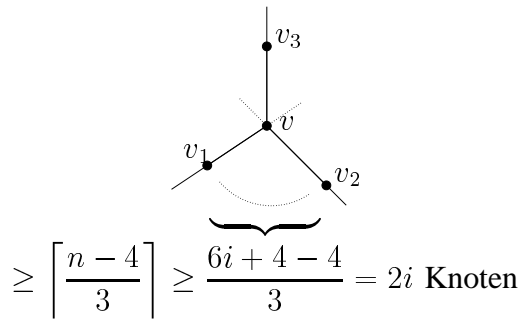


Abbildung 3.5.

Nach dem Schubfachprinzip und wegen $n \geq 6i + 4$ befinden sich in einem der Winkelbereiche, wie etwa in Abbildung 3.5 angegeben, mindestens $\lceil \frac{n-4}{3} \rceil \geq \frac{6i+4-4}{3} = 2i$ Knoten. Da v_3 die Bedingung für (3.4) erfüllt, und mit $x \leq n - 4 - 2i$, haben dann (v, v_1) und (v, v_2) nach (3.4) höchstens $S \leq \frac{n^2}{2} - 3n + 4 - \frac{1}{2}(n - 4 - 2i - (n - 4))^2$ Kreuzungen, so daß wie in Fall 1 die Kanten (v, v_1) oder (v, v_2) weniger als $\frac{n^2}{4} - n - i^2 - 2i + 1$ Kreuzungen haben, auf alle Fälle für $n \geq 6i + 4$. \square

Satz 5. Für ungerades n gilt

$$r_s(n) = \binom{n}{2} - (i+1)n$$

für $\overline{E}(K_n) - i^2 - 3i - 2 \leq s \leq \overline{E}(K_n) - i^2 - i - 1$ mit $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n-5}{6} \rfloor$.

Beweis. Satz 3 liefert für die Behauptung eine obere Schranke.

Für die Abschätzung nach unten wird angenommen, daß es eine Darstellung gibt, in der mindestens $(i+1)n+1$ Kanten jeweils mindestens $\overline{E}(K_n) - i^2 - 3i - 2 + 1 = \frac{n^2-1}{4} - n - i^2 - 3i$ Kreuzungen haben. Die $(i+1)n+1$ Kanten bestimmen $2((i+1)n+1) = 2in + 2n + 2$ Knoten. Dann gibt es einen Knoten v , der mit mindestens $\lceil \frac{2in+2n+2}{n} \rceil = 2i+3$ Kanten inzidiert, die jeweils mindestens $\frac{n^2-1}{4} - n - i^2 - 3i$ Kreuzungen besitzen.

Fall 1: Der Knoten v liegt außerhalb der konvexen Hülle der $2i+3$ Knoten.

Mit v_1 und v_2 werden die beiden der $2i+3$ Knoten bezeichnet, die mit v zwei Geraden g und g' bestimmen, so daß g und g' einen Winkelbereich beschreiben, in dem die restlichen $2i+1$ Knoten liegen (siehe Abbildung 3.6).

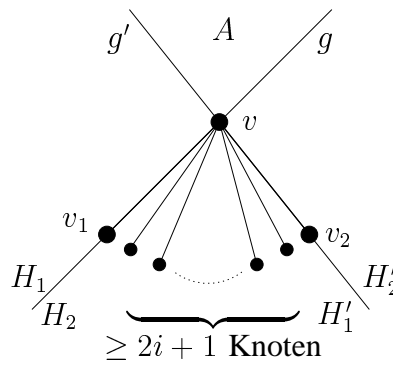


Abbildung 3.6.

Sowohl (v, v_1) als auch (v, v_2) haben nur dann mindestens $\frac{n^2-1}{4} - n - i^2 - 3i$ Kreuzungen, wenn in den beiden Halbebenen H_1 und H'_2 jeweils mehr als $\frac{n-1}{2} - i - 1$ Knoten liegen, weil sonst maximal $(\frac{n-1}{2} - i - r)(n - 2 - (\frac{n-1}{2} - i - r)) = \frac{n^2-1}{4} - n - i^2 + i + 1 - r(2i - 1 - r)$ Kreuzungen, also für $r \geq 2$ höchstens $\frac{n^2-1}{4} - n - i^2 - 3i - 1$ Kreuzungen, auf diesen Kanten sein können. Daraus folgt, daß in $A = H_1 \cap H'_2$ mindestens ein Knoten liegt, weil sich sonst

die Mindestanzahlen von Knoten in H_1 und H'_2 und den restlichen Knoten von $\overline{D}(K_n)$ zu $2\left(\frac{n-1}{2} - i - 1\right) + 2i + 4 = n + 1$ summieren.

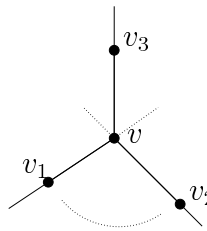
In $H'_1 \cap H_2$ liegen mindestens $2i + 1$ Knoten. Mit einem Knoten in A gilt $x \leq n - 4 - (2i + 1)$ für x in (3.4), so daß für die maximale Anzahl S von Kreuzungen auf (v, v_1) und (v, v_2) nach (3.4) folgt

$$S \leq \frac{n^2}{2} - 3n + 4 - \frac{1}{2}(n - 4 - (2i + 1) - (n - 4))^2 = \frac{n^2 + 7}{2} - 3n - 2i^2 - 2i.$$

Also ist $S < 2\left(\frac{n^2-1}{4} - n - i^2 - 3i\right) = \frac{n^2-1}{2} - 2n - 2i^2 - 6i$ für $n > 4i + 4$. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, daß sowohl (v, v_1) als auch (v, v_2) mindestens $\frac{n^2-1}{4} - n - i^2 - 3i$ Kreuzungen haben.

Fall 2: Der Knoten v liegt innerhalb der konvexen Hülle der $2i + 3$ Knoten.

Drei der $2i + 3$ Knoten bilden ein Dreieck $v_1 v_2 v_3$, in dem sich v befindet (siehe Abbildung 3.7). Die drei Halbgeraden, die v_1, v_2 und v_3 enthalten und sich in v treffen, erzeugen drei Winkelbereiche.



$$\geq \left\lceil \frac{n-4}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{6i+5-4}{3} \right\rceil = 2i + 1 \text{ Knoten}$$

Abbildung 3.7.

Da $n \geq 6i + 5$ gilt, befinden sich nach dem Schubfachprinzip in einem der Winkelbereiche, wie in Abbildung 3.7, mindestens $\left\lceil \frac{n-4}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{6i+5-4}{3} \right\rceil = 2i + 1$ Knoten. Mit v_3 wird die Bedingung in (3.4) erfüllt und mit $x \leq n - 4 - (2i + 1)$ haben (v, v_1) und (v, v_2) zusammen höchstens $S \leq \frac{n^2}{2} - 3n + 4 - \frac{1}{2}(n - 4 - (2i + 1) - (n - 4))^2$ Kreuzungen, so daß (v, v_1) oder (v, v_2) weniger als $\frac{n^2-1}{4} - n - i^2 - 3i$ Kreuzungen für $n \geq 6i + 5$ hat. \square

Wird nun eine Darstellung $\overline{D}^h(K_n)$ mit $h < n$ betrachtet, so liegen die weiteren Knoten w_i für $i = 1, 2, \dots, n - h$ innerhalb der Gebiete, die von den Diagonalen des h -Ecks erzeugt werden. Die Anzahl der Kreuzungen auf einer Kante von einem Knoten w_i zu einem Knoten v des h -Ecks liegt zwischen 0 und $\overline{E}(K_n) - 1$. In dem folgenden Lemma wird für alle h gezeigt, daß es Darstellungen $\overline{D}^h(K_n)$ gibt, in denen ein sogenanntes Zentralgebiet Z existiert, so daß alle Kanten von Knoten des h -Ecks zu Knoten in Z mindestens z Kreuzungen besitzen.

Lemma 4. Es existiert eine Darstellung $\overline{D}^h(K_n)$ mit einem Zentralgebiet Z , so daß jede Kante von einem Knoten in Z zu den Knoten auf dem Rand der konvexen Hülle mindestens

$$z = \left\lfloor \frac{(h-2)^2}{8} \right\rfloor$$

Kreuzungen hat.

Beweis. $h \equiv 1 \pmod{2}$: Bilden die Knoten auf dem Rand der konvexen Hülle ein reguläres h -Eck H , so entsteht in der Mitte einer solchen Zeichnung ein Zentralgebiet Z (siehe Abbildung 3.8).

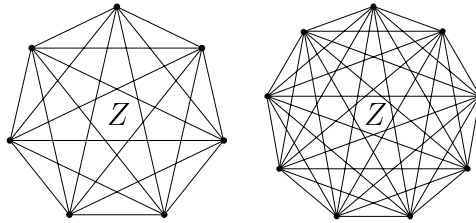


Abbildung 3.8. Zentralgebiet Z in $\overline{D}^7(K_7)$ und $\overline{D}^9(K_9)$.

Eine Kante von einem Knoten in Z zu einem Knoten von H wird von einer Diagonalen der Länge 2, von zwei Diagonalen der Länge 3 und allgemein von $l-1$ Diagonalen der Länge $l \leq \frac{h-1}{2}$ geschnitten. Daraus folgt für die Anzahl z der Kreuzungen

$$z = 1 + 2 + \dots + \frac{h-3}{2} = \left(\left\lfloor \frac{\frac{h-1}{2}}{2} \right\rfloor \right) = \left\lfloor \frac{(h-2)^2}{8} \right\rfloor.$$

$h \equiv 0 \pmod{2}$: Eine Darstellung $\overline{D}^h(K_n)$ mit einem Zentralgebiet kann auf folgende Weise konstruiert werden.

Zunächst werden $\frac{h}{2}$ Geraden so in die Ebene gelegt, daß sie paarweise nicht parallel sind und ein $\frac{h}{2}$ -Eck umschließen, das dann das Zentralgebiet Z wird. Ein Kreis K wird betrachtet, dessen Mittelpunkt in dem $\frac{h}{2}$ -Eck liegt, und dessen Radius so gewählt ist, daß alle $\binom{\frac{h}{2}}{2}$ Schnittpunkte der Geraden innerhalb von K liegen, und kein Punkt aus dem $\frac{h}{2}$ -Eck mit einem der Schnittpunkte zwischen den Geraden und einem der Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreis kollinear ist. Die h Schnittpunkte der Geraden mit K sind dann die Knoten von $\overline{D}^h(K_n)$ (siehe Abbildung 3.9).

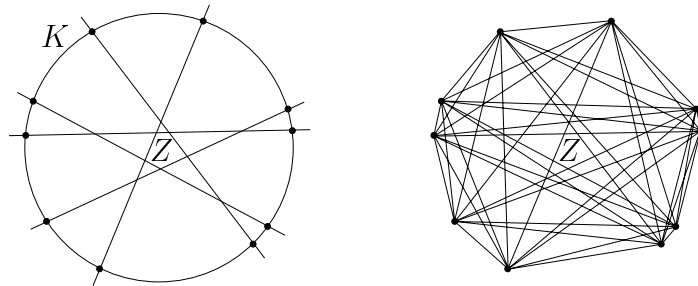


Abbildung 3.9. Zentralgebiet Z in $\overline{D}^{10}(K_{10})$.

Eine Kante von einem Knoten in Z zu einem Knoten von H wird von $l - 1$ Diagonalen der Längen $l = 2, 3, \dots, \frac{h-2}{2}$ gekreuzt. Hinzu kommen die Kreuzungen, die von den Diagonalen der Länge $\frac{h}{2}$ des h -Ecks, den Hauptdiagonalen, erzeugt werden. Jede dieser Diagonalen der Länge $\frac{h}{2}$ wird von $\frac{h-2}{2}$ Kanten zwischen Knoten in Z und des h -Ecks geschnitten, also haben die Hauptdiagonalen zusammen $\frac{h}{2} \frac{h-2}{2}$ Kreuzungen mit diesen Kanten. Diese Kreuzungen sind in der Darstellung auf die einzelnen Kanten so gleich wie möglich verteilt, so daß mindestens $\lfloor \frac{1}{h} \frac{h}{2} \frac{h-2}{2} \rfloor$ Kreuzungen zu jeder dieser Kanten hinzukommen. Also gilt in diesem Fall

$$z = \binom{\lfloor \frac{h-1}{2} \rfloor}{2} + \left\lfloor \frac{h-2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(h-2)^2}{8} \right\rfloor.$$

□

Für Darstellungen $\overline{D}^h(K_n)$ mit $n - h$ Knoten im Zentralgebiet gilt folgendes Korollar.

Korollar 2. Es gilt $r_s(n) \leq \binom{n-h}{2} + h(l-1)$ für $l = 2, 3, \dots, \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$ und $s + 1 \leq \min(z, n(l-1) - l^2 + 1)$ mit z aus Lemma 4.

Beweis. In $\overline{D}^h(K_n)$ hat jede Kante zwischen einem Knoten aus Z und einem Knoten des h -Ecks mindestens z Kreuzungen. Die Diagonalen der Länge l im h -Eck haben jeweils $(l-1)(h-l-1)$ Kreuzungen. Hinzu kommen $(n-h)(l-1)$ Kreuzungen von Kanten zwischen Knoten aus Z und des h -Ecks, so daß die Diagonalen der Länge l

$$c = (l-1)(h-l-1) + (n-h)(l-1) = n(l-1) - l^2 + 1$$

Kreuzungen besitzen.

Sind z und c beide größer als s , so haben höchstens $(l-1)h$ Kanten zwischen Knoten des h -Ecks und die $\binom{n-h}{2}$ Kanten zwischen den Knoten in Z weniger als $s + 1$ Kreuzungen.

□

Bilden die Knoten in Z ein konvexes $(n-h)$ -Eck, so haben die Diagonalen der Länge k innerhalb des $(n-h)$ -Ecks mindestens $(k-1)(n-h-k-1) = (n-h)(k-1) - k^2 + 1$ Kreuzungen. Damit ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 3. Es gilt $r_s(n) \leq h(l-1) + (n-h)(k-1)$ für $l = 2, 3, \dots, \lfloor \frac{h}{2} \rfloor$, $k = 2, 3, \dots, \lfloor \frac{n-h}{2} \rfloor$ und $s + 1 \leq \min(z, n(l-1) - l^2 + 1, (n-h)(k-1) - k^2 + 1)$ mit z aus Lemma 4.

Kapitel 4

Untere Schranken für Darstellungen mit kleinen konvexen Hüllen

Bei Beweisen der Werte von $r_s(n)$ werden häufig Klassen von Darstellungen $\overline{D}^h(K_n)$ untersucht, in denen die Anzahl h der Knoten auf dem Rand der konvexen Hülle fest gewählt wird. Es gilt für die minimale Anzahl $r_s^h(n)$ von Kanten mit jeweils maximal s Kreuzungen in geradlinigen Darstellungen $\overline{D}^h(K_n)$

$$r_s^h(n) \geq r_s(n). \quad (4.1)$$

Die Kanten des konvexen h -Ecks einer Darstellung $\overline{D}^h(K_n)$ haben keine Kreuzung, also folgt

$$r_s^h(n) \geq h,$$

und allgemein gilt $r_s(n) \geq 3$. Diese Aussage wird verschärft durch den folgenden Satz.

Satz 6. *Für eine geradlinige Darstellung $\overline{D}(K_n)$ mit $n \geq 5$ gilt $r_s(n) \geq 5$. Falls die konvexe Hülle kein Fünfeck ist, hat $\overline{D}(K_n)$ mindestens 6 ungekreuzte Kanten.*

Beweis. In $\overline{D}^3(K_n)$ existiert zu jeder Kante e des Dreiecks ein Knoten v im Dreieck mit größtem Abstand zu e . Die Kante zwischen v und dem e gegenüberliegenden Knoten des Dreiecks besitzt keine Kreuzung. Also haben diese Darstellungen drei ungekreuzte Kanten auf dem Dreieck und mindestens drei weitere Kanten ohne Kreuzung innerhalb des Dreiecks.

In $\overline{D}^4(K_n)$ kommen mindestens sechs ungekreuzte Kanten vor. In diesem Fall wird ein Knoten v innerhalb des Vierecks betrachtet, der zu einer Diagonalen des Vierecks den größten Abstand besitzt. Eine kreuzungsfreie Verbindung von v ergibt sich zu dem Knoten des Vierecks, der mit v in der gleichen durch die Diagonale bestimmten Halbebene liegt. Für jede der beiden Diagonalen existiert daher mindestens eine ungekreuzte Kante, und mit den vier Kanten der konvexen Hülle folgt auch hier die Behauptung. □

Lemma 5. *Liegen in einer Halbebene, die von einer Geraden g durch einen Knoten v bestimmt wird, genau a Knoten v_1, v_2, \dots, v_a , so gilt für die Summe S der Kreuzungen auf den Kanten $(v, v_1), (v, v_2), \dots, (v, v_a)$*

$$S \leq \binom{a}{3} + \binom{a}{2}(n - a - 1).$$

Beweis. Die Gerade g teilt die Ebene in die Halbebenen H_1 und H_2 . In H_1 liegen die a Knoten v_1, v_2, \dots, v_a .

Zunächst werden die Kanten zwischen v, v_1, v_2, \dots, v_a betrachtet. Es gibt $\binom{a}{3}$ Dreiecke der Knoten v_1, v_2, \dots, v_a . Jedes der Dreiecke kann mit v ein konvexes Viereck bilden, und damit ergibt sich jeweils eine Kreuzung mit (v, v_i) für $1 \leq i \leq a$.

Jede der $\binom{a}{2}$ Kanten (v_i, v_j) mit $1 \leq i < j \leq a$ bildet mit v ein Dreieck vv_iv_j . Jeder der $n - a - 1$ Knoten in H_2 kann mit diesen Dreiecken ein konvexes Viereck bilden, so daß sich höchstens $\binom{a}{2}(n - a - 1)$ Kreuzungen mit (v_i, v_j) ergeben.

Die Abschätzung für S wird in $\overline{D}^n(K_n)$ angenommen.

□

Lemma 6. *Liegt jeweils mindestens ein Knoten in d Randdreiecken, die von aufeinanderfolgenden Knoten des h -Ecks von $\overline{D}^h(K_n)$ gebildet werden, so hat $\overline{D}^h(K_n)$ mindestens $h + d$ kreuzungsfreie Kanten.*

Beweis. Durch einen Knoten innerhalb eines Randdreiecks gibt es eine Gerade, die den mittleren Knoten des Randdreiecks von den übrigen Knoten von $\overline{D}^h(K_n)$ trennt. Mit $a = 1$ in Lemma 5 folgt die Aussage für die d Randdreiecke.

□

Korollar 4. *Es gilt $r_s^h(n) \geq 2h$ für $s \geq n - 3$ und $n \geq 5$.*

Beweis. Zum einen haben die h Kanten auf dem Rand der konvexen Hülle keine Kreuzungen.

Zum anderen hat jede Diagonale der Länge 2 zwischen zwei Knoten auf dem h -Eck, die ein Randdreieck bestimmt, genau $n - 3$ Kreuzungen, wenn kein Knoten in dem Randdreieck ist. Zu jedem Randdreieck, in dem ein weiterer Knoten liegt, existiert nach Lemma 6 eine kreuzungsfreie Kante.

Also hat $\overline{D}^h(K_n)$ für $s \geq n - 3$ mindestens $2h$ Kanten mit jeweils maximal s Kreuzungen.

□

4.1 Dreieck als konvexe Hülle

Untersucht werden Darstellungen $\overline{D}^3(K_n)$ für $n \geq 6$, in denen die konvexe Hülle ein Dreieck T mit den Randknoten v_1, v_2 und v_3 ist. Die Knoten innerhalb von T werden mit w_1, w_2, \dots, w_{n-3} bezeichnet. Nach Satz 6 existieren mindestens 6 Kanten ohne Kreuzung. Dieses sind zum einen die Kanten von T und zum anderen geht von jedem Knoten von T mindestens eine kreuzungsfreie Kante zu einem Knoten innerhalb von T .

Satz 7. Es gelten $r_s^3(n) \geq 11$ für $6 \leq n \leq s+4$ und $r_s^3(n) \geq 8$ für $s+5 \leq n \leq 2s+5$.

Beweis. Angenommen, w_1 hat zu (v_2, v_3) den größten Abstand, und w_2 hat den zweitgrößten Abstand unter allen Knoten in T . Bei eventuell gleichem Abstand kann w_2 in einer ε -Umgebung so verschoben werden, daß sich eine isomorphe Darstellung ergibt. Nach dem Beweis von Satz 6 ist (v_1, w_1) eine kreuzungsfreie Kante.

Die zu (v_2, v_3) parallele Gerade durch w_2 wird mit g bezeichnet. Die Gerade durch w_1 und w_2 heißt g_0 , und g_1 beziehungsweise g_2 sind die Geraden, die v_1 und w_1 beziehungsweise v_1 und w_2 enthalten.

Es kann angenommen werden, daß w_2 bezüglich g_1 in der gleichen Halbebene liegt wie v_2 . Dann ist das Viereck $v_1w_1w_2v_2$ konvex (i) oder konkav (ii), siehe Abbildungen 4.1 und 4.2.

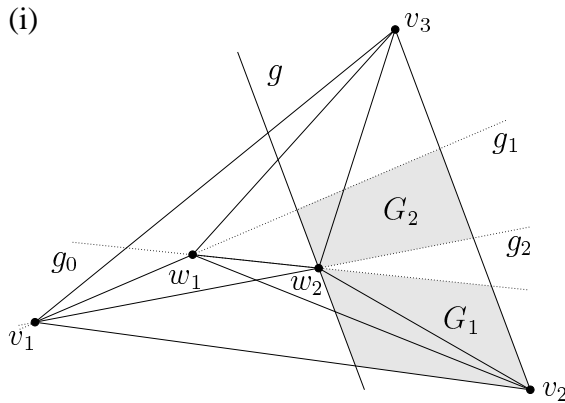


Abbildung 4.1. $\overline{D}^3(K_n)$ mit konvexem Viereck $v_1w_1w_2v_2$.

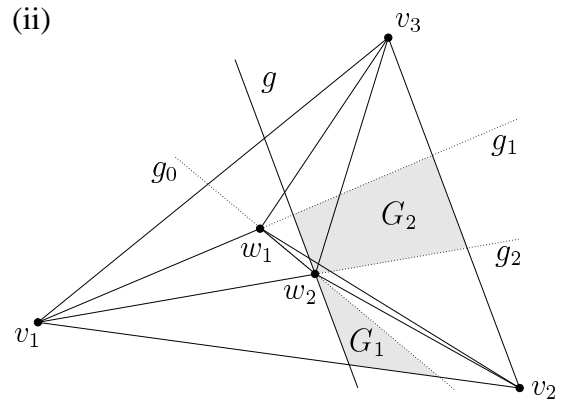


Abbildung 4.2. $\overline{D}^3(K_n)$ mit konkavem Viereck $v_1w_1w_2v_2$.

- (i) Das offene Gebiet G_1 wird von (v_1, v_2) , (v_2, v_3) , g und g_0 begrenzt. Die Kante (v_1, w_2) wird nur von Kanten geschnitten, die w_1 mit v_2 und mit allen Knoten innerhalb G_1 verbinden. Also hat (v_1, w_2) nur dann mindestens $s+1$ Kreuzungen, wenn in G_1 mindestens s Knoten liegen.

Die Geraden g, g_1, g_2 und (v_2, v_3) bestimmen das Gebiet G_2 . Auf (w_1, w_2) entstehen nur Kreuzungen durch Kanten, die v_1 mit Knoten innerhalb von G_2 verbinden. Dann

hat (w_1, w_2) mindestens $s + 1$ Kreuzungen, wenn innerhalb von G_2 mindestens $s + 1$ Knoten liegen.

Damit folgt für $n \leq 5 + s - 1$, daß weder (v_1, w_2) noch (w_1, w_2) mehr als s Kreuzungen haben. Da G_1 und G_2 disjunkt sind, folgt für $n \leq 2s + 5$ mit dem Schubfachprinzip auch, daß höchstens eine der beiden Kanten (v_1, w_2) oder (w_1, w_2) mehr als s Kreuzungen hat.

- (ii) Das Gebiet G_1 wird von (v_1, v_2) und den Geraden g und g_0 bestimmt, und G_2 hat g , g_1 , g_2 und (v_2, v_3) als Rand. Dann werden (v_1, w_2) beziehungsweise (w_1, w_2) jeweils $(s + 1)$ -mal geschnitten, wenn in G_1 beziehungsweise in G_2 mindestens $s + 1$ Knoten liegen.

Also haben sowohl (v_1, w_2) als auch (w_1, w_2) für $n \leq 5 + s$ weniger als $s + 1$ Kreuzungen. Falls $n \leq 5 + 2s + 1$, dann wird entweder (v_1, w_2) oder (w_1, w_2) höchstens s -mal geschnitten, denn G_1 und G_2 sind auch in diesem Fall disjunkt.

Für $n \leq s + 4$ gehen also von jedem Knoten v_i des Dreiecks T zu mindestens zwei inneren Knoten von T Kanten mit weniger als $s + 1$ Kreuzungen. Für $n \geq 6$ kann das Punktepaar w_1 und w_2 nicht gleichzeitig zu allen drei Kanten von T den größten und zweitgrößten Abstand haben. Es gibt also mindestens noch zwei Kanten (w_i, w_j) mit weniger als $s + 1$ Kreuzungen. Mit den Kanten von T gibt es insgesamt für $6 \leq n \leq s + 4$ mindestens $3 + 6 + 2 = 11$ Kanten mit jeweils höchstens s Kreuzungen, also gilt $r_s^3(n) \geq 11$.

Ist $n \leq 2s + 5$, so haben außer den drei Randkanten und den drei Kanten von den Eckpunkten aus noch mindestens zwei weitere Kanten höchstens s Schnittpunkte, so daß $r_s^3(n) \geq 8$ für $s + 5 \leq n \leq 2s + 5$ folgt.

□

4.2 Viereck als konvexe Hülle

Nach Satz 6 hat $\overline{D}^4(K_n)$ mindestens sechs Kanten ohne Kreuzungen, so daß $r_s^4(n) \geq 6$. Für gewisse Werte von n gilt auch der folgende Satz.

Satz 8. Es gelten $r_s^4(n) \geq 9$ für $7 \leq n \leq s + 4$ und $r_s^4(n) \geq 7$ für $s + 5 \leq n \leq 2s + 5$.

Beweis. In $\overline{D}^4(K_n)$ sind die vier Kanten des konvexen Vierecks $v_1 v_2 v_3 v_4$ kreuzungsfrei. Die Knoten von $v_1 v_2 v_3 v_4$ bilden vier Dreiecke. Nach dem Schubfachprinzip gibt es für jedes Paar sich nicht überschneidender Dreiecke eines, in dem jeweils mindestens $\lceil \frac{n-4}{2} \rceil$ Knoten liegen.

Angenommen, $v_1 v_2 v_4$ ist eines dieser Dreiecke, so gibt es für $n \geq 7$ unter allen Knoten in $v_1 v_2 v_4$ einen Knoten w_1 mit größtem Abstand zu (v_2, v_4) und einen Knoten w_2 mit zweitgrößtem Abstand zu (v_2, v_4) . Die Kanten (v_1, w_2) beziehungsweise (w_1, w_2) haben in der Darstellung des vollständigen Teilgraphen mit den Knoten w_1, w_2 und v_i mit $1 \leq i \leq 4$ höchstens zwei Kreuzungen beziehungsweise eine Kreuzung (vergleiche Abbildung 2.1 für $\overline{D}^4(K_6)$).

Die zu (v_2, v_4) parallele Gerade g durch w_2 teilt die Ebene so, daß in der einen Halbebene nur die beiden Knoten v_1 und w_1 liegen (siehe Abbildung 4.3). Dann können (v_1, w_2) beziehungsweise (w_1, w_2) nur von Kanten geschnitten werden, deren einer Endpunkt w_1 beziehungsweise v_1 ist. Es gibt also in $\overline{D}^4(K_n)$ keine Kante, die sowohl (v_1, w_2) als (w_1, w_2) gleichzeitig schneidet. Es folgt, daß (v_1, w_1) keine Kreuzung hat, (v_1, w_2) höchstens s für $n - 6 \leq s - 2$ und (w_1, w_2) höchstens s für $n - 6 \leq s - 1$. Also haben die drei Kanten jeweils weniger als $s + 1$ Kreuzungen für $7 \leq n \leq s + 4$.

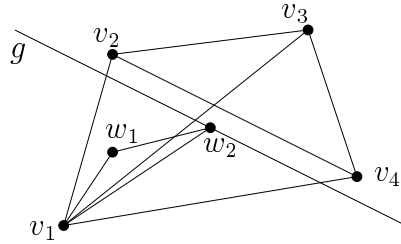


Abbildung 4.3.

Analog ergeben sich drei Kanten mit höchstens s Kreuzungen in einem zweiten Dreieck, $v_1v_2v_3$ oder $v_1v_3v_4$, für $7 \leq n \leq s + 4$. Bei den beiden Kanten zwischen den inneren Knoten w_i kann es sich um dieselbe Kante handeln. Also folgt $r_s^4(n) \geq 4 + 3 + 2 = 9$ für $7 \leq n \leq s + 4$.

Für $n \leq 6 + 2s - 1 = 2s + 5$ hat mindestens eine der Kanten (v_1, w_2) oder (w_1, w_2) höchstens s Kreuzungen; dann folgt $r_s^4(n) \geq 7$. □

4.3 Fünfeck als konvexe Hülle

Für $\overline{D}^5(K_n)$ gelten folgende Abschätzungen nach unten.

Satz 9. Es gelten $r_s^5(n) \geq 9$ für $6 \leq n \leq s + 4$ und $r_s^5(n) \geq 7$ für $s + 5 \leq n \leq 2s + 4$.

Beweis. Es werden Darstellungen $\overline{D}^5(K_n)$ mit den Knoten v_1, v_2, v_3, v_4 und v_5 auf dem Rand der konvexen Hülle betrachtet. Jeder weitere Knoten liegt in mindestens drei Vierecken $v_i v_j v_k v_l$ mit $1 \leq i < j < k < l \leq 5$. Für $n \geq 6$ bilden etwa die Knoten v_1, v_2, v_3 und v_4 ein Viereck, in dem mindestens ein weiterer Knoten der Darstellung liegt. Dann gibt es eine Gerade g durch einen Knoten, etwa w_1 , in $v_1v_2v_3v_4$, welche die Ebene so teilt, daß nur v_2 und v_3 in einer der Halbebenen liegen (siehe Abbildung 4.4). Alle weiteren Knoten von $\overline{D}^5(K_n)$ außer w_1 befinden sich in der anderen Halbebene.

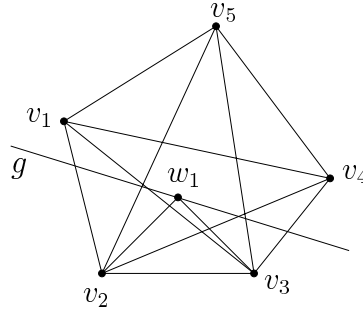


Abbildung 4.4.

In der Darstellung $\overline{D}^5(K_6)$ des vollständigen Teilgraphen mit den Knoten des Fünfecks und w_1 haben (v_2, w_1) und (v_3, w_1) zusammen höchstens drei Kreuzungen, wovon keine der beiden Kanten mehr als zwei besitzt (vergleiche $\overline{D}^5(K_6)$ in Abbildung 2.1). Es können nur Kanten, deren einer Endpunkt v_2 beziehungsweise v_3 ist, eine Kreuzung auf (v_3, w_1) beziehungsweise auf (v_2, w_1) erzeugen, so daß für $n - 6 \leq s - 2$ keine der beiden Kanten (v_2, w_1) oder (v_3, w_1) mehr als s Kreuzungen hat. Dann haben zwei Kanten von w_1 aus weniger als $s + 1$ Kreuzungen für $6 \leq n \leq s + 4$.

Analog kann für zwei weitere Vierecke $v_i v_j v_k v_l$ gezeigt werden, daß es für $n \leq s + 4$ zwei Kanten von Knoten des Fünfecks zu einem Knoten innerhalb des Fünfecks gibt, die weniger als $s + 1$ Kreuzungen besitzen. Angenommen, der Knoten w_1 hat in jedem der drei betrachteten Vierecke zu der jeweiligen Diagonalen des Fünfecks den größten Abstand, so gibt es mindestens vier Kanten von w_1 zu Knoten der konvexen Hülle mit weniger als $s + 1$ Kreuzungen. Daraus folgt $r_s^5(n) \geq 5 + 4 = 9$ für $6 \leq n \leq s + 4$.

In $v_1 v_2 v_3 v_4$ hat höchstens eine der Kanten (v_2, w_1) oder (v_3, w_1) mehr als s Kreuzungen, falls $n - 6 \leq 2s - 2$. Dies gilt ebenfalls für mindestens zwei weitere Vierecke $v_i v_j v_k v_l$. Eine dieser Kanten kann in zwei der drei Vierecke vorkommen. Also gilt $r_s^5(n) \geq 5 + 2 = 7$ für $6 \leq n \leq 2s + 4$.

□

Kapitel 5

Fünf Kanten mit weniger als $s + 1$ Kreuzungen

Für Darstellungen $D(K_n)$ wurde in [17] gezeigt, daß $h_s(n) = 0$ für $n \geq \frac{4}{3}s + O(\sqrt{s})$ gilt. Dieser Aussage entsprechen die in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnisse zu geradlinigen Darstellungen $\overline{D}(K_n)$. Es wird gezeigt, daß für alle $s \geq 1$ und genügend große n Darstellungen $\overline{D}^5(K_n)$ existieren, in denen nur die Kanten auf dem Rand der konvexen Hülle weniger als $s + 1$ Kreuzungen haben.

In [18] wurde schon $r_0(n) = 5$ für $n \geq 8$ bewiesen.

Satz 10. *Es gilt $r_1(n) = 5$ für $n \geq 11$.*

Beweis. Aus Satz 6 folgt $r_1(n) \geq 5$. Zur Abschätzung nach oben wird zunächst die Abbildung 5.1 betrachtet. In dieser Darstellung des K_{11} haben nur die Kanten der konvexen Hülle weniger als zwei Kreuzungen.

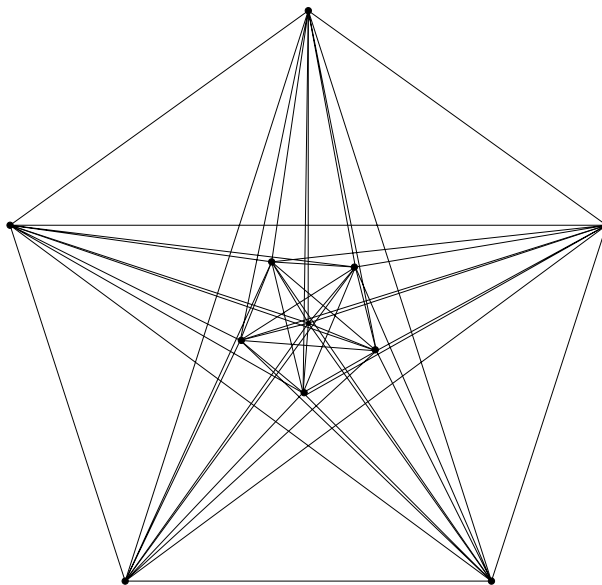


Abbildung 5.1. $r_1(11) \leq 5$.

In Abbildung 5.2 ist eine Ausschnittsvergrößerung des Zentralgebietes aus Abbildung 5.1 dargestellt. In die fünf mit \oplus markierten Gebiete können nacheinander weitere Knoten gezeichnet werden, so daß die Aussage des Satzes auch für $12 \leq n \leq 16$ gilt.

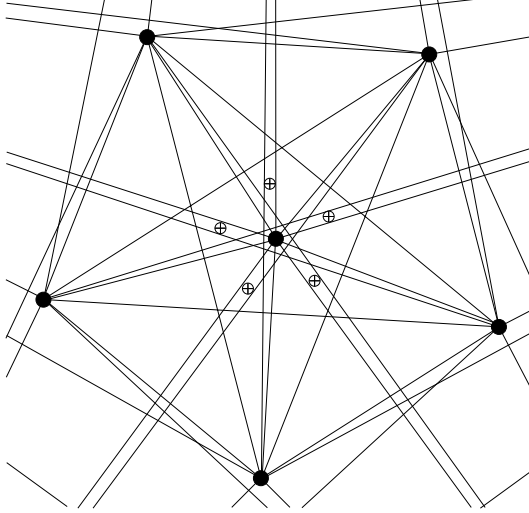


Abbildung 5.2.

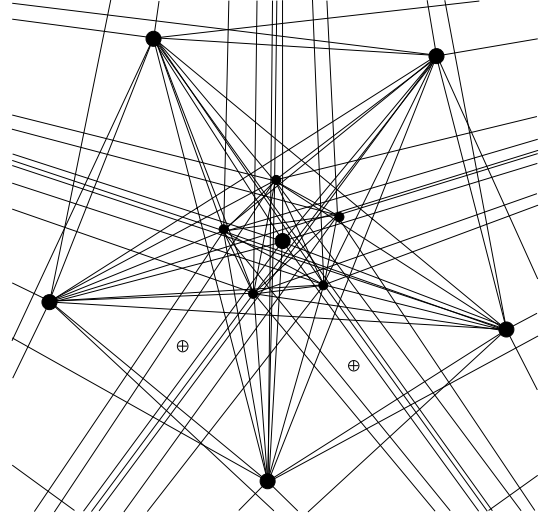


Abbildung 5.3.

Der Ausschnitt einer Darstellung $\overline{D}^5(K_{16})$ in Abbildung 5.3 hat zwei mit \oplus gekennzeichnete Gebiete, in die Knoten eingefügt werden können, deren Kanten immer mindestens zwei Kreuzungen haben. Damit ist $r_1(n) = 5$ für $n \leq 18$ bewiesen.

Der Nachweis von $r_1(n) \leq 5$ für $n \geq 19$ folgt wegen (3.1) aus den Sätzen 11 und 12. In Abbildung 5.3 können natürlich auch weitere Knoten eingefügt werden, deren Kanten jeweils mindestens zwei Kreuzungen haben.

□

Satz 11. Es gilt $r_2(n) = 5$ für $n \geq 18$.

Beweis. Aus Satz 6 folgt $r_2(n) \leq 5$.

In Abbildung 5.4 ist eine Darstellung $\overline{D}(K_{18})$ so gezeichnet, daß nur die Kanten der konvexen Hülle weniger als drei Kreuzungen haben.

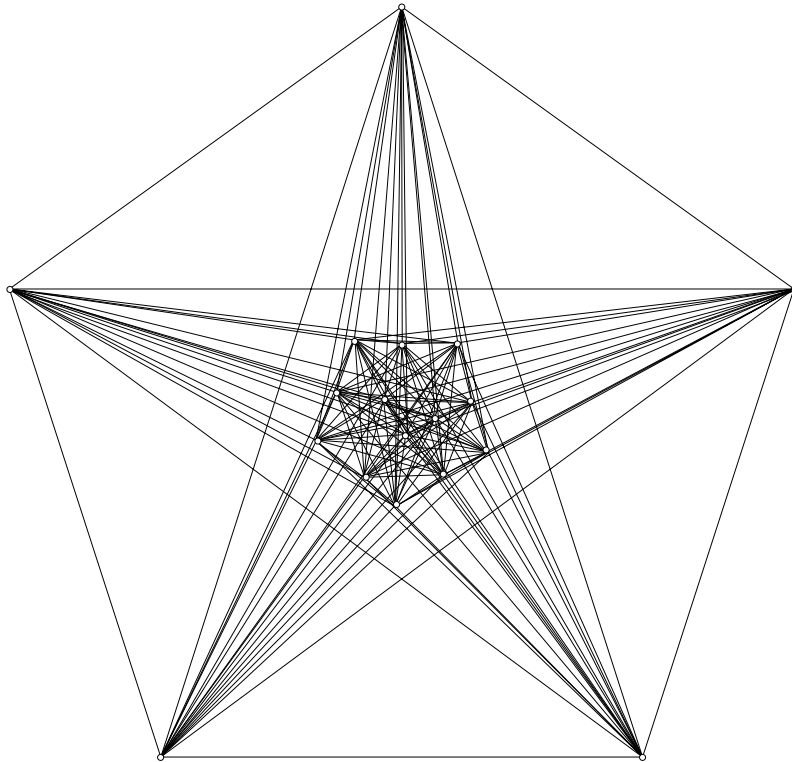


Abbildung 5.4. $r_2(18) \leq 5$.

Es gilt $r_2(n) = 5$ für $19 \leq n \leq 29$, wenn in Abbildung 5.5 in die mit \oplus gekennzeichneten Gebiete des Ausschnitts aus Abbildung 5.4 nacheinander jeweils ein weiterer Knoten gelegt wird. Die Kanten von jedem Knoten dieser Art haben dann jeweils mindestens drei Kreuzungen.

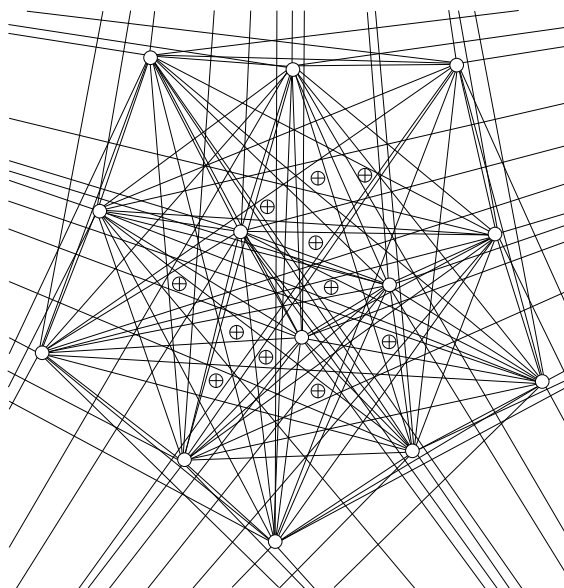


Abbildung 5.5.

Für $n \geq 30$ ergibt sich $r_2(n) \leq 5$ wegen (3.1) aus der Konstruktion von $\overline{D}^5(K_n)$ für $s = 3$ im Beweis von Satz 12.

□

Satz 12. Es gilt $r_s(n) = 5$ für $n \geq \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor (5s - 5) + 5s + 5$ und $s \geq 3$.

Beweis. Nach Satz 6 gilt wieder $r_s(n) \geq 5$.

Für $r_s(n) \leq 5$ wird $\overline{D}^5(K_n)$ zunächst für $n = \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor (5s - 5) + 5s + 5$ konstruiert.

Die Knoten v_1, v_2, v_3, v_4 und v_5 auf dem Rand der konvexen Hülle von $\overline{D}^5(K_n)$ bilden ein reguläres Fünfeck. Alle restlichen Knoten liegen innerhalb des Zentralgebietes Z . Hier bilden die Knoten $w_1^1, w_2^1, \dots, w_{5s}^1$ ein konvexes, gleichseitiges $5s$ -Eck so, daß sich $w_1^1, w_{s+1}^1, w_{2s+1}^1, w_{3s+1}^1, w_{4s+1}^1$ dicht an den Eckpunkten von Z befinden, und etwa w_1^1 dicht bei dem Schnittpunkt von (v_1, v_3) und (v_2, v_5) liegt. Die restlichen $n - 5s - 5$ Knoten liegen auf $\lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor$ konzentrischen konvexen $(5s - 5)$ -Ecken mit den Knoten

$$w_1^r, w_2^r, \dots, w_{5s-5}^r \quad \text{mit} \quad 2 \leq r \leq \left\lfloor \frac{s+1}{3} \right\rfloor + 1.$$

Da die Konstruktion vorerst mit einem Winkel von 72° rotationssymmetrisch sein soll, wird nur die Lage der Knoten in Z für einen Ausschnitt entlang der Kante (v_1, v_3) beschrieben (siehe Abbildung 5.6).

Die Seitenlänge des gleichseitigen, konvexen $5s$ -Ecks kann so gewählt werden, daß die Vierecke $v_1 w_i^1 w_j^1 v_3$ mit $1 \leq i < j \leq s + 1$ konvex sind. Von (v_1, v_3) aus gesehen, liegen auf konvexen Bögen für r mit $2 \leq r \leq \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + 1$ die Knoten w_i^r jeweils für $1 \leq i \leq s - 1$. Die von den Knoten v_2 und w_i^r bestimmten Geraden g_{v_2, w_i^r} sind in Abbildung 5.6 als gestrichelte Linien eingezeichnet.

Jeweils für $i = 1, 2, \dots, s - 1$ liegen die Knoten w_i^r mit geradem r und $2 \leq r \leq \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + 1$ beziehungsweise ungeradem r und $2 \leq r \leq \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + 1$ rechts beziehungsweise links von g_{v_2, w_{i+1}^1} , so daß diese Punkte zusammen mit w_{i+1}^1 und v_2 konvexe Vielecke bilden. Dabei sollen diese Punkte so gewählt werden, daß die Punkte w_i^r für $r \geq 3$ und $1 \leq i \leq s - 1$ immer oberhalb von $g_{w_1^{r-1}, w_{s-1}^{r-1}}$ liegen, und daß w_i^2 immer oberhalb von $g_{w_1^1, w_{s+1}^1}$ liegt.

Es sei bemerkt, daß die Punkte so gewählt werden können, daß alle Punkte unmittelbar rechts und links von g_{v_2, w_{i+1}^1} jeweils beliebig dicht zusammenliegen.

Bei dieser Konstruktion ist es möglich, daß Mehrfachkreuzungen auftreten, oder daß es nicht erlaubte Kollinearitäten von Knoten gibt. In dem Fall können einzelne Knoten in einer ε -Umgebung so verschoben werden, daß die angegebenen Bedingungen erhalten bleiben.

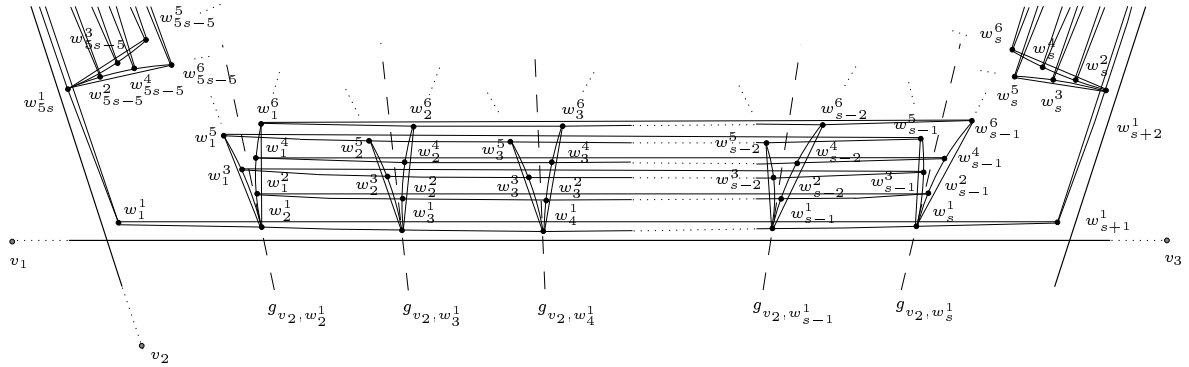


Abbildung 5.6.

Es wird nun gezeigt, daß alle Kanten, außer den fünf Randkanten, mindestens $s + 1$ Kreuzungen haben. Dazu wird im folgenden von zwei Kanten, die von denselben Kanten geschnitten werden, nur diejenige mit der kleineren Anzahl c von Kreuzungen betrachtet. Für die verschiedenen Typen von Kanten wird die Anzahl c jeweils nach unten abgeschätzt.

(w_i^1, w_{i+1}^1) mit $2 \leq i \leq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$:

Diese Kanten haben Kreuzungen mit den Kanten von v_2 zu den $\lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor$ Knoten zwischen g_{v_2, w_i^1} und g_{v_2, w_{i+1}^1} dicht bei (v_1, v_3) .

Angenommen, es kreuzen auch noch die Kanten von v_2 zu den 2 Knoten $w_{4s-2i+3}^1$ und $w_{4s-2i+2}^1$ und zu den 2 $\lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor$ dicht bei diesen liegenden Knoten, so gilt $c \geq 3 \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + 2 \geq s + 1$. Für $s \equiv 1 \pmod{2}$ und $i = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ wird w_{3s}^1 anstelle von w_{3s+1}^1 gewählt.

Zum Beweis der Annahme werden die beliebig dicht am Rand von Z und dicht bei w_i^1 liegenden Knotenmengen mit $5s$ äquidistanten Punkten auf dem Rand von Z identifiziert, siehe Abbildung 5.7.

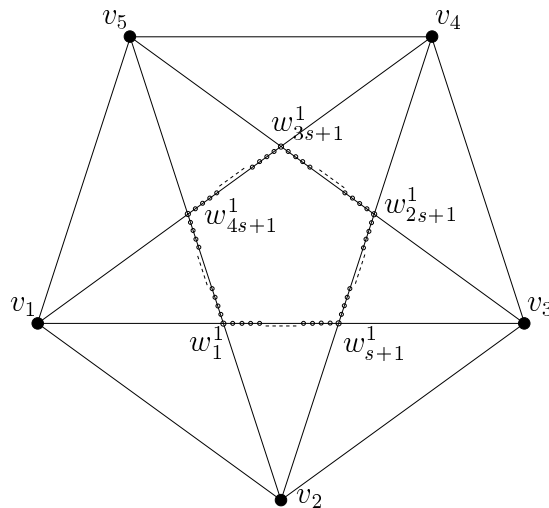


Abbildung 5.7.

Es reicht, den Teil der Darstellung zwischen v_2 , w_{3s+1}^1 und w_{4s+1}^1 zu betrachten (siehe Abbildungen 5.8 und 5.9 für gerade beziehungsweise ungerade s).

Auf der zu (v_1, v_3) parallelen Strecke \overline{BD} liegen die äquidistanten Punkte Q_j auf den Geraden durch v_2 und den äquidistanten Punkten auf dem Rand von Z . Die Punkte P_j auf \overline{BC} sind die äquidistanten Punkte auf (v_1, v_4) .

Mit den Winkeln $\sphericalangle ACB = 54^\circ$ und $\sphericalangle ABD = 72^\circ$ ergeben sich $|\overline{AD}| = \sin 72^\circ$, $|\overline{BD}| = \cos 72^\circ$, $|\overline{BC}| = \frac{\cos 72^\circ}{\sin 54^\circ}$ und $|\overline{CD}| = \frac{\cos 72^\circ}{\tan 54^\circ}$, wenn $|\overline{AB}| = 1$ angenommen wird. Der Abstand von \overline{BD} zu P_i ist $(s-i)x$ mit $x = \frac{1}{s} \frac{\cos 72^\circ}{\tan 54^\circ}$ und $0 \leq i \leq s$, und P_i hat zu \overline{AC} den Abstand iy mit $y = x \tan 54^\circ = \frac{\cos 72^\circ}{s}$. Für die Winkel $\alpha_i = \sphericalangle P_i AC$ ergibt sich

$$\tan \alpha_i = \frac{iy}{\sin 72^\circ + (s-i)x} = \frac{i \cos 72^\circ}{s \sin 72^\circ + (s-i) \frac{\cos 72^\circ}{\tan 54^\circ}}.$$

Kann nun für die Winkel $\beta_j = \sphericalangle Q_j AC$ gezeigt werden, daß

- (i) $\alpha_{2j} < \beta_j < \alpha_{2j+1}$ mit $1 \leq j \leq \frac{s-2}{2}$ für $s \equiv 0 \pmod{2}$ und
- (ii) $\alpha_{2j-1} < \beta_j < \alpha_{2j}$ mit $1 \leq j \leq \frac{s-1}{2}$ für $s \equiv 1 \pmod{2}$

gelten, dann kann die obige Annahme mit entsprechenden ε -Verschiebungen der Knoten erfüllt werden, da immer zwei aufeinanderfolgende α -Werte zwischen zwei aufeinanderfolgenden β -Werten liegen.

(i) Die Abstände zwischen Q_j und D sind $\frac{2j \cos 72^\circ}{s}$. Also gilt $\tan \beta_j = \frac{2j \cos 72^\circ}{s} \frac{1}{\sin 72^\circ} = \frac{2j}{s \tan 72^\circ}$. Es gilt $\alpha_{2j} < \beta_j < \alpha_{2j+1}$ genau dann, wenn $\tan \alpha_{2j} < \tan \beta_j < \tan \alpha_{2j+1}$. Die Ungleichung

$$\frac{2j \cos 72^\circ}{s \sin 72^\circ + (s-2j) \frac{\cos 72^\circ}{\tan 54^\circ}} < \frac{2j}{s \tan 72^\circ} < \frac{(2j+1) \cos 72^\circ}{s \sin 72^\circ + (s-(2j+1)) \frac{\cos 72^\circ}{\tan 54^\circ}}$$

ist erfüllt für $j \leq \frac{s-2}{2}$.

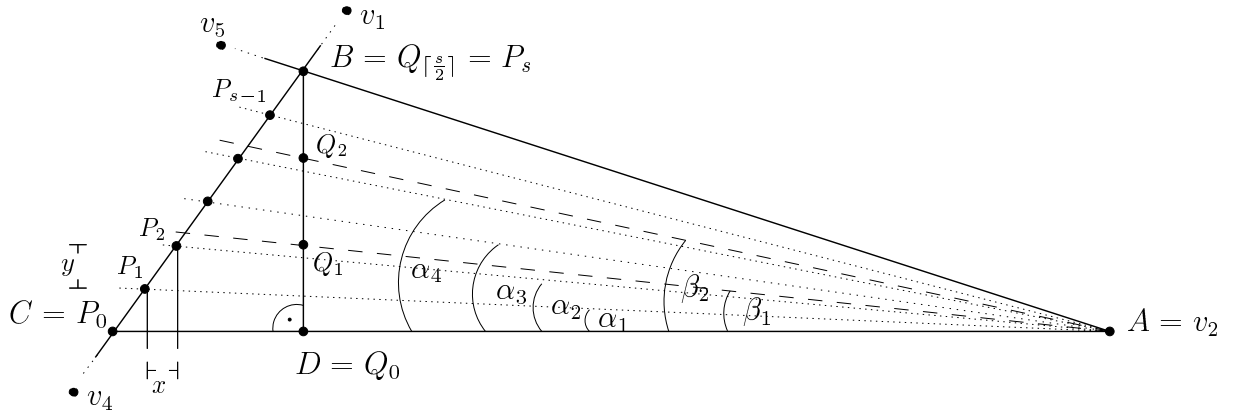


Abbildung 5.8. Winkel α_i und β_j für $s = 6$.

(ii) Die Strecken $\overline{Q_j D}$ haben die Längen $\frac{(2j-1) \cos 72^\circ}{s}$. Somit gilt $\tan \beta_j = \frac{(2j-1) \cos 72^\circ}{s} \frac{1}{\sin 72^\circ} = \frac{2j-1}{s \tan 72^\circ}$. Die Ungleichung $\alpha_{2j-1} < \beta_j < \alpha_{2j}$ gilt, wenn $\tan \alpha_{2j-1} < \tan \beta_j < \tan \alpha_{2j}$ ist. Es ist

$$\frac{2j \cos 72^\circ}{s \sin 72^\circ + (s-2j) \frac{\cos 72^\circ}{\tan 54^\circ}} < \frac{2j-1}{s \tan 72^\circ} < \frac{(2j+1) \cos 72^\circ}{s \sin 72^\circ + (s-(2j+1)) \frac{\cos 72^\circ}{\tan 54^\circ}}$$

erfüllt für $j \leq \frac{s-1}{2}$.

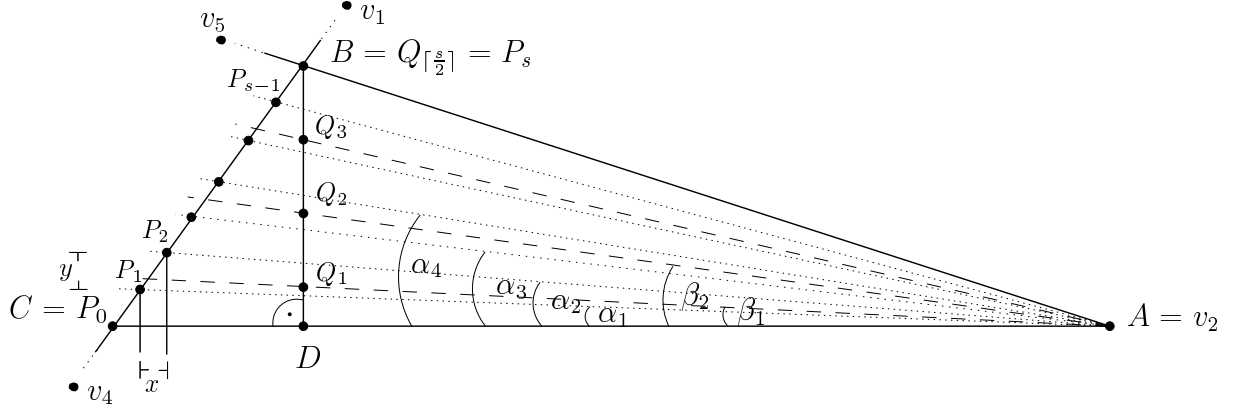


Abbildung 5.9. Winkel α_i und β_j für $s = 7$.

(w_i^1, v_2) mit $1 \leq i \leq s + 1$:

Diese Kanten haben Kreuzungen mit (v_1, v_3) , (w_j^1, v_3) und (w_k^1, v_1) für $1 \leq j < i < k \leq s + 1$. Also ist $c \geq s + 1$.

(w_1^1, w_{5s}^1) :

Die Kanten haben Kreuzungen mit (w_{s+2}^1, v_1) und mit (w_i^r, v_1) für $1 \leq i \leq s$ und $2 \leq r \leq \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + 1$. Also ist $c \geq s \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + 1 \geq s + 1$.

(w_{s+1}^1, w_{s+2}^1) :

Die Kanten haben Kreuzungen mit (w_{5s}^1, v_3) , (w_i^r, v_3) und (w_{5s-5}^r, v_3) mit $1 \leq i \leq s - 1$ und $2 \leq r \leq \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + 1$. Also ist $c \geq (s - 1) \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + 1 \geq s + 1$.

(w_i^r, w_i^{r+1}) mit $2 \leq r \leq \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor$:

Die Kanten haben Kreuzungen mit (w_{i+1}^1, w_j^q) für $2s - 2 \leq j \leq 4s - 4$ und $2 \leq r \leq \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + 1$. Also ist $c \geq (2s - 1) \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor \geq s + 1$.

(w_i^1, w_{i-1}^2) mit $2 \leq i \leq s$:

Die Kanten haben Kreuzungen mit (w_j^1, w_k^1) für $1 \leq j < i < k \leq s + 1$, (w_{s+1}^1, w_m^2) und (v_3, w_m^2) für $1 \leq m \leq i - 2$ und (w_1^1, w_l^2) sowie (v_1, w_l^2) für $i \leq l \leq s - 1$. Also ist $c \geq s - 1 + 2(s - 2) \geq s + 1$.

(w_{5s-5}^q, w_1^r) mit $2 \leq q, r \leq \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + 1$:

Die Kanten haben Kreuzungen mit (w_1^1, w_j^1) für $2s + 1 \leq j \leq 3s + 1$. Also ist $c \geq s + 1$.

Für $n > \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor (5s - 5) + 5s + 5$ wird zunächst eine entsprechende Darstellung $\overline{D}^5(K_n)$ mit $n = (\lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + 2)(5s - 5) + 5s + 5$ Knoten konstruiert, bei der in Z noch zwei weitere konvexe $(5s - 5)$ -Ecke liegen. Dadurch kommen keine neuen Kantentypen hinzu, so daß alle Kanten auch mindestens $s + 1$ Kreuzungen haben. Für $\overline{D}^5(K_n)$ mit $\lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor (5s - 5) + 5s + 5 < n \leq (\lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + 2)(5s - 5) + 5s + 5$ werden Knoten in der Reihenfolge

$$w_i^r, w_{s-1+i}^r, w_{2s-2+i}^r, w_{3s-3+i}^r, w_{4s-4+i}^r, w_{s-i}^r, w_{2s-1-i}^r, w_{3s-2-i}^r, w_{4s-3-i}^r, w_{5s-4-i}^r$$

für $i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ und $r = \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + 3, \lfloor \frac{s+1}{3} \rfloor + 2$ aus der Darstellung entfernt, wobei alle Kanten mindestens $s + 1$ Kreuzungen behalten.

Der Beweis von Satz 12 wird vollständig, wenn der bisherige Beweis entsprechend für $s + 1, s + 2, \dots$ anstelle von s durchgeführt wird. Es folgen $r_{s+1}(n) \leq 5, r_{s+2}(n) \leq 5, \dots$ für sich überschneidende Intervalle von n , so daß mit (3.1) auch $r_s(n) \leq 5$ bewiesen ist. \square

In Darstellungen, die nach der Konstruktionsbeschreibung aus Satz 12 nur die Knoten v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 und w_i^1 besitzen, haben die $5s$ Kanten (w_i^1, w_{i+1}^1) zusammen $5(2s - 1)$ Kreuzungen. Wenn innerhalb des $5s$ -Ecks weitere $s^2 - s + 1$ Knoten liegen, dann haben die Kanten (w_i^1, w_{i+1}^1) zusammen $5(2s - 1) + 5(s^2 - s + 1) = 5s^2 + 5s$ Kreuzungen. Eventuell kann die Lage der $s^2 - s + 1$ Knoten so gewählt werden, daß jede Kante (w_i^1, w_{i+1}^1) genau $\frac{5s^2+5s}{5s} = s + 1$ Kreuzungen hat. Daraus ergibt sich die Vermutung, daß $r_s(n) = 5$ schon für $n \geq s^2 + 4s + 6$ gilt ($s \geq 1$). Diese Vermutung ist hier für $s \leq 4$ nachgewiesen (siehe die Andeutungen in Abbildungen 5.10 und 5.11 für $s = 3$ und $s = 4$ und die Sätze 10 und 11).

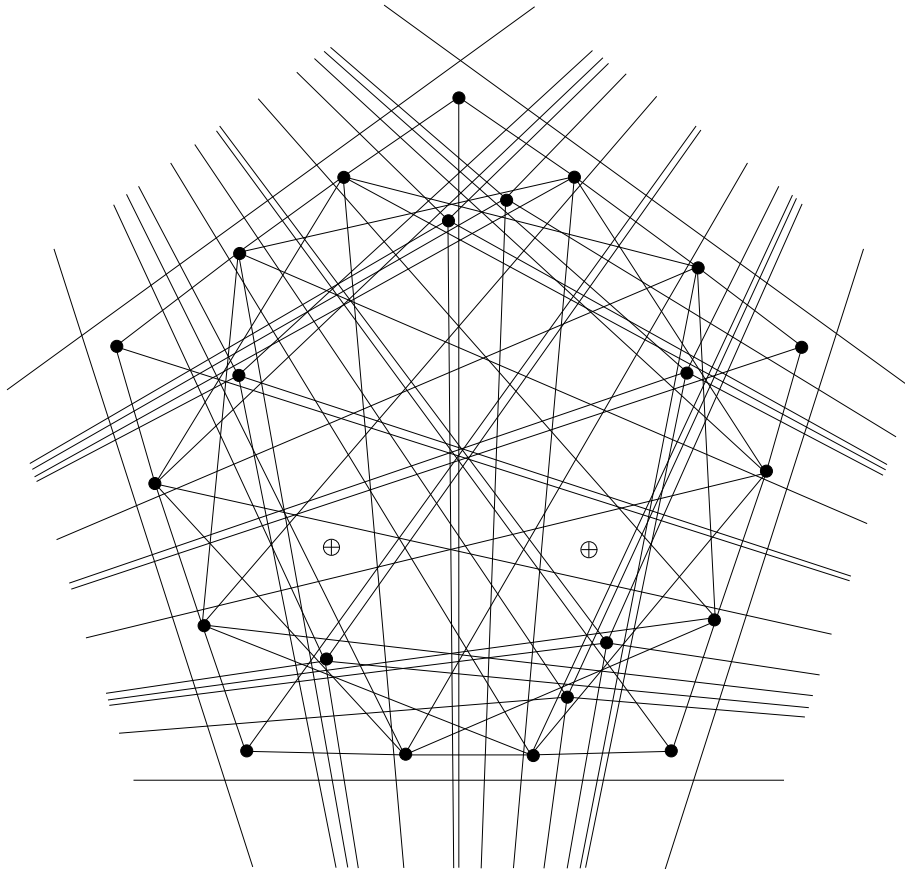


Abbildung 5.10. $r_3(27) \leq 5$.

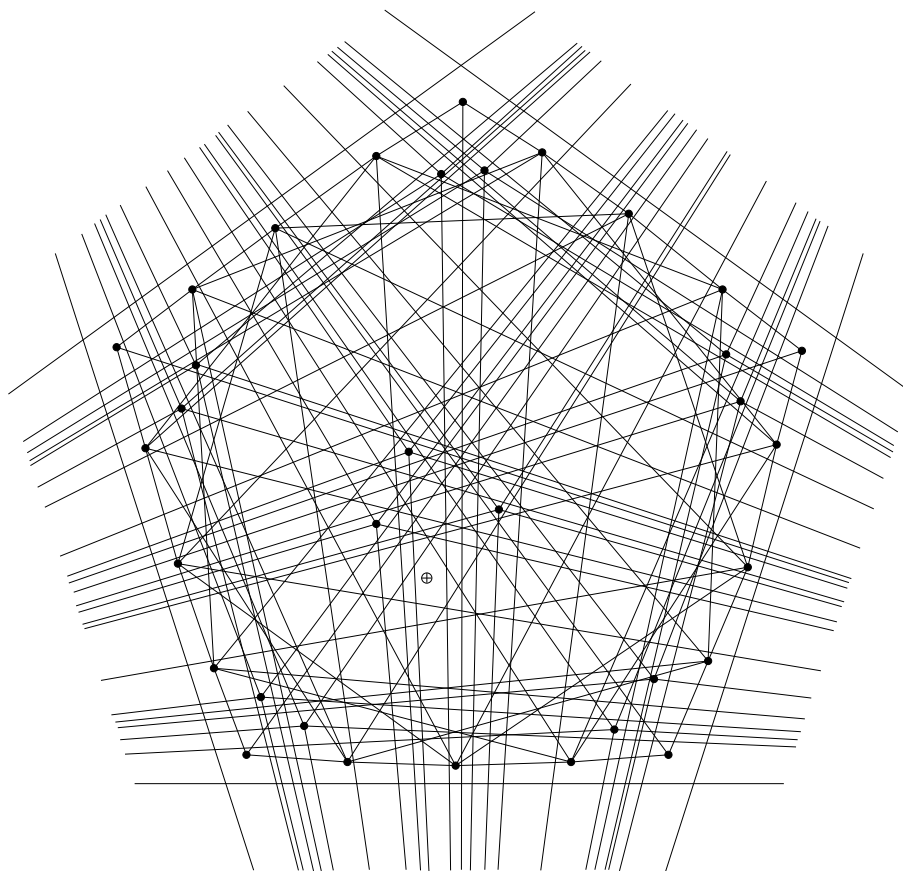


Abbildung 5.11. $r_4(38) \leq 5$.

Kapitel 6

Schranken und exakte Werte für kleine n

Die exakten Werte von $r_s(n)$ für $n \leq 6$ gehen aus Abbildung 2.1 hervor. Die Frage nach der minimalen Anzahl von kreuzungsfreien Kanten in $\overline{D}(K_n)$, also nach $r_0(n)$, wurde in [18] vollständig beantwortet.

Im folgenden werden exakte Werte von $r_s(n)$ und obere Schranken für $n \leq 20$ und $s \leq 10$ in Tabelle 1 zusammengefaßt.

6.1 Werte für $r_s(7)$

$r_1(7) = 6$: Aus $r_0(7) = 6$ und (3.1) folgt $r_1(7) \geq 6$. Nach Korollar 2 mit $h = 6$ und $l = 2$ gilt $r_1(7) \leq 6$, siehe auch Abbildung A.1. Also gilt $r_1(7) = 6$.

$r_2(7) = 7$: Aus den Sätzen 7, 8 beziehungsweise 9 folgen $r_2^3(7) \geq 8$, $r_2^4(7) \geq 7$ beziehungsweise $r_2^5(7) \geq 7$. In der Darstellung $\overline{D}^6(K_6)$ von Abbildung 2.1 gibt es kein Gebiet, in welches ein weiterer Knoten gelegt werden kann, der ausschließlich mit Kanten inzidiert, die jeweils mehr als zwei Kreuzungen haben. Mit den sechs kreuzungsfreien Kanten auf dem Rand der konvexen Hülle gilt dann $r_2^6(7) \geq 7$. Aus Satz 3 mit $i = 1$ folgt $r_2(7) \leq 7$. Damit gilt $r_2(7) = 7$.

$r_3(7) = 7$: Da $r_2(7) = 7$ folgt mit (3.1), daß $r_3(7) \geq 7$. Nach Satz 3 mit $i = 1$ gilt $r_3(7) \leq 7$, also ist $r_3(7) = 7$.

$r_4(7) = 14$: Nach Satz 3 mit $i = 0$ gilt $r_4(7) \leq 14$.

Angenommen, es gibt eine Darstellung $\overline{D}(K_7)$, in der weniger als 14 Kanten jeweils höchstens fünf Kreuzungen haben.

Wenn eine Darstellung $\overline{D}(K_n)$ mindestens r Kanten mit jeweils maximal s Kreuzungen hat, dann hat $\overline{D}(K_n)$ höchstens $\binom{n}{2} - r$ Kanten mit mindestens $s + 1$ Kreuzungen. Diese $\binom{n}{2} - r$ Kanten bestimmen $2(\binom{n}{2} - r)$ Endpunkte von Kanten, also gibt es nach dem Schubfachprinzip mindestens einen Knoten, der mit

$$k = \left\lceil \frac{2(\binom{n}{2} - r)}{n} \right\rceil = \left\lceil n - 1 - \frac{2r}{n} \right\rceil \quad (6.1)$$

Kanten inzidiert, die jeweils $s + 1$ Kreuzungen haben.

In diesem Fall gibt es nach (6.1) mit der Annahme $r \leq 13$ mindestens einen Knoten v , der mit mindestens drei Kanten (v, v_1) , (v, v_2) und (v, v_3) inzidiert, die jeweils 5 Kreuzungen besitzen.

Falls v in dem Dreieck $v_1v_2v_3$ liegt, so haben nach (3.4) mit $x \leq 3$ zwei der drei Kanten zusammen höchstens sieben Kreuzungen, also hat mindestens eine dieser Kanten weniger als fünf Kreuzungen. Es ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme.

Wenn v außerhalb des Dreiecks liegt (siehe Abbildung 6.1), und in dem Winkelbereich A mindestens ein Knoten liegt, dann haben (v, v_1) und (v, v_3) nach (3.4) mit $x \leq 3$ zusammen höchstens sieben Kreuzungen.

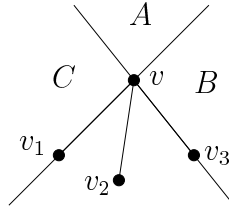


Abbildung 6.1.

Es wird angenommen, daß in A kein Knoten liegt. In B oder C liegt höchstens $\lfloor \frac{7-4}{2} \rfloor = 1$ Knoten. Liegt nun genau ein Knoten in C , dann hat (v, v_1) maximal $n - 3 = 4$ Kreuzungen. Enthält C keinen Knoten, so ist (v, v_1) kreuzungsfrei. Es gibt also keinen Knoten v , der mit drei Kanten inzidiert, welche jeweils fünf Kreuzungen haben.

Also gilt $r_4(7) > 13$, und damit $r_4(7) = 14$.

$r_5(7) = 14$: Aus (3.3) folgt $r_5(7) = 14$.

$r_s(7) = 21$ mit $s \geq 6$: Nach (3.2) gilt $r_s(7) = 21$ für $s \geq 6$.

6.2 Werte für $r_s(8)$

$r_1(8) = 7$: Nach Korollar 2 mit $h = 7$ und $l = 2$ gilt $r_1(8) \leq 7$, siehe auch Abbildung A.1.

Es wird gezeigt, daß $r_1(8) \geq 7$ gilt, indem die Darstellungen $\overline{D}^h(K_8)$ für $h \leq 6$ für unterschiedliche konvexe Hüllen untersucht werden.

In $\overline{D}^3(K_8)$ kommen mindestens sieben Kanten mit weniger als zwei Kreuzungen vor. Es wird der Beweis von Satz 7 zu Hilfe genommen. Im Fall (i) des Beweises von Satz 7 befindet sich ein Knoten w_3 in G_1 , und zwei Knoten w_4 und w_5 liegen in G_2 , damit (v_1, w_2) und (w_1, w_2) jeweils zwei Kreuzungen haben. Dann ist (v_2, w_3) kreuzungsfrei, da keine Kante durch G_1 geht, die nicht zu v_2 oder w_3 inzident ist. Falls w_3 innerhalb von $v_1v_2w_2w_1$, dann hat (w_2, w_3) nur eine Kreuzung mit (v_2, w_1) . Liegt w_3 außerhalb von $v_1v_2w_2w_1$, so kann (w_2, w_3) nur Kreuzungen mit (v_2, w_4) und (v_2, w_5) haben. In dem Fall hat (v_3, w_3) keine Kreuzung, also gehen dann mit (v_3, w_1) zwei kreuzungsfreie Kanten von v_3 aus. In diesem Fall gilt $r_s^3(8) \geq 7$.

Für den Fall (ii) des Beweises von Satz 7 ist es nicht möglich, sowohl auf (v_1, w_2) als auch auf (w_1, w_2) gleichzeitig jeweils mindestens zwei Kreuzungen zu bekommen, da in G_1 und in G_2 nicht gleichzeitig jeweils zwei Knoten liegen können. Also gilt $r_1^3(8) \geq 7$.

In $\overline{D}^4(K_8)$ liegen v_1, v_2, v_3 und v_4 auf dem Rand der konvexen Hülle der Darstellung. Alle restlichen Knoten liegen in einem Dreieck, welches von den Diagonalen (v_1, v_3) , (v_2, v_4) und einer Randkante des Vierecks, etwa (v_1, v_4) , umschlossen wird, denn sonst existieren nach Lemma 6 mindestens sieben ungekreuzte Kanten. Angenommen, w_1 hat den größten und w_2 den zweitgrößten Abstand zu (v_2, v_4) , siehe Abbildung 6.2. Das Viereck $v_1 w_1 w_2 v_4$ ist entweder (i) konvex oder (ii) konkav.

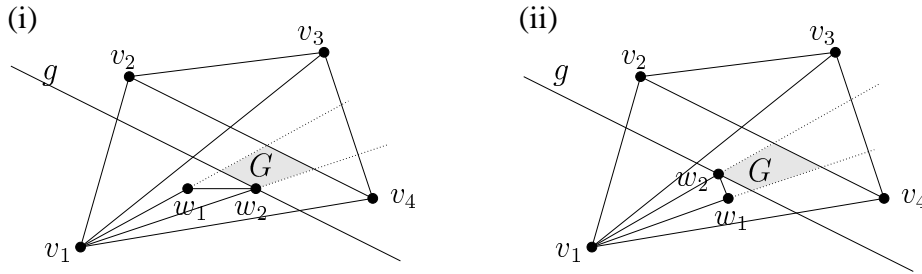


Abbildung 6.2.

Die Kante (w_1, w_2) hat nur dann zwei Kreuzungen, wenn sich in dem Gebiet G die beiden restlichen Knoten der Darstellung befinden. Dann hat im Fall (i) die Kante (v_1, w_2) nur eine Kreuzung mit (v_4, w_1) . Nach Satz 6 hat $\overline{D}^4(K_n)$ noch weitere sechs Kanten, die kreuzungsfrei sind. Also gibt es mindestens sieben Kanten mit weniger als zwei Kreuzungen. Im Fall (ii) hat die Kante von v_2 zu w_1 oder w_2 , je nachdem welcher von den beiden Knoten den kleinsten Abstand zu (v_1, v_3) hat, nur eine Kreuzung mit (v_1, v_3) , falls die konvexe Hülle von v_1, v_2, v_3, w_1 und w_2 ein Viereck ist. Wenn diese fünf Knoten ein konvexes Fünfeck bilden, dann hat die Kante von v_4 zu dem Knoten in G , der den größten Abstand zu (v_1, v_3) hat, keine Kreuzung, also gehen dann mit (v_4, w_1) zwei kreuzungsfreie Kanten von v_4 aus. Mit (v_1, w_1) und den vier Kanten des Vierecks $v_1 v_2 v_3 v_4$ haben auch in diesem Fall mindestens sieben Kanten jeweils weniger als zwei Kreuzungen.

Somit gilt $r_1^4(8) \geq 7$.

Die Knoten auf dem Rand der konvexen Hülle F von $\overline{D}^5(K_8)$ bilden das konvexe Fünfeck $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$. Angenommen, es liegen mindestens zwei der drei inneren Knoten in einem Dreieck D , wie in Abbildung 6.3, wobei w_1 den größten Abstand und w_2 den zweitgrößten Abstand zu (v_2, v_5) hat. Dann ist (v_1, w_1) kreuzungsfrei, und (w_1, w_2) hat höchstens eine Kreuzung mit (v_1, w_3) . Zusammen mit den fünf kreuzungsfreien Kanten des Fünfecks hat eine solche Darstellung mindestens sieben Kanten mit jeweils weniger als zwei Kreuzungen.

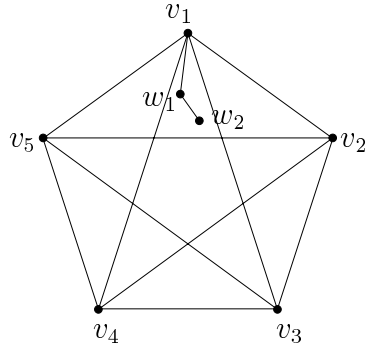


Abbildung 6.3.

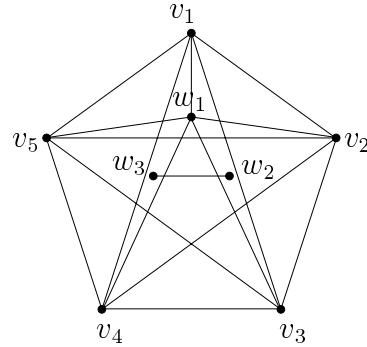


Abbildung 6.4.

Falls in D nur ein Knoten w_1 liegt, dann ist (v_1, w_1) kreuzungsfrei. Die beiden Knoten w_2 und w_3 befinden sich im Zentralgebiet Z von $\overline{D}^5(K_8)$. Auf (w_2, w_3) können nur Kreuzungen von (w_1, v_3) und (w_1, v_4) entstehen, siehe Abbildung 6.4. Dann hat (w_2, v_2) nur eine Kreuzung. Auch in diesem Fall kommen mindestens sieben Kanten mit höchstens einer Kreuzung vor.

Angenommen, die Knoten w_1, w_2 und w_3 bilden ein Dreieck in Z von $\overline{D}^5(K_8)$. Jede Seite des Dreiecks kann nur von solchen Kanten geschnitten werden, deren einer Endpunkt im Dreieck dieser Kante gegenüberliegt, und deren anderer Endpunkt ein Knoten von F ist. Diese Kanten haben auf F keinen gemeinsamen Punkt, also haben die Seiten des Dreiecks zusammen höchstens fünf Kreuzungen.

Wenn zwei der Dreiecksseiten jeweils mehr als eine Kreuzung haben, dann gibt es eine Gerade g durch zwei Punkte des Dreiecks, so daß in einer von g bestimmten Halbebene vier Knoten von F liegen, siehe Abbildung 6.5. Somit befinden sich die beiden Knoten auf g nicht in Z .

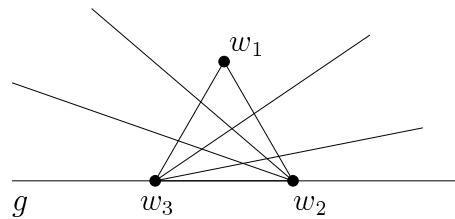


Abbildung 6.5.

In diesem Fall haben mindestens zwei Kanten des Dreiecks in Z und die Kanten von F weniger als zwei Kreuzungen.

Daraus folgt $r_1^5(8) \geq 7$.

Falls in $\overline{D}^6(K_8)$ mindestens einer der beiden inneren Knoten w_1 oder w_2 in einem Randdreieck liegt, dann folgt aus Lemma 6, daß die Darstellung mindestens sieben kreuzungsfreie Kanten hat. Falls sich die beiden inneren Knoten in demselben Gebiet von $\overline{D}^6(K_6)$ befinden,

dann ist deren Verbindung kreuzungsfrei. Aufgrund der Symmetrie von $\overline{D}^6(K_6)$ liegt einer der beiden Knoten, etwa w_1 , in Gebiet A oder B , siehe Abbildung 6.6.

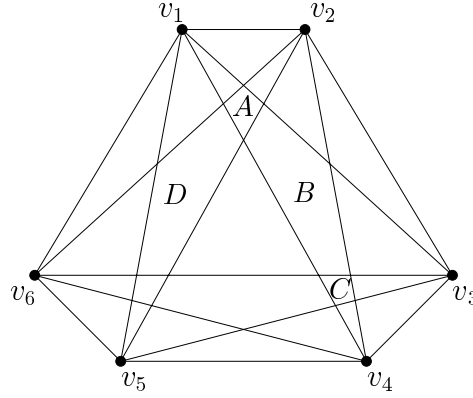


Abbildung 6.6.

Liegt w_1 in A , so kann (v_2, w_1) nur eine zweite Kreuzung von (v_1, w_2) erhalten. Wenn w_2 in B liegt, dann hat (w_1, w_2) nur eine Kreuzung. Falls sich w_2 in C befindet, so hat (v_4, w_2) nur eine Kreuzung.

Angenommen, w_1 liegt in B . Die Kante (v_2, w_1) kann nur eine weitere Kreuzung von (v_3, w_2) bekommen, andernfalls liegen w_1 und w_2 in zwei benachbarten Gebieten von $\overline{D}^6(K_6)$, und (w_1, w_2) hat nur eine Kreuzung. Also liegt w_2 in D , und (v_1, w_2) hat nur eine Kreuzung mit (v_2, v_6) .

Somit gilt $r_1^6(8) \geq 7$, da die Kanten auf dem Rand der konvexen Hülle und eine innere Kante von $\overline{D}^6(K_8)$ weniger als zwei Kreuzungen haben.

Daraus folgt $r_1(8) \geq 7$, also ist $r_1(8) = 7$.

$r_2(8) = 7$: Aus $r_1(8) = 7$ und (3.1) folgt $r_2(8) \geq 7$. Nach Korollar 2 mit $h = 7$ und $l = 2$ gilt $r_2(8) \leq 7$, siehe auch Abbildung A.2. Also gilt $r_2(8) = 7$.

$r_3(8) = 8$: Die Abschätzung $r_3(8) \leq 8$ folgt aus Satz 3 für $i = 2$, siehe auch Abbildung A.5.

Angenommen, es gibt eine Darstellung, in der höchstens sieben Kanten weniger als vier Kreuzungen haben. Dann folgt aus (6.1) mit $r \leq 7$, daß ein Knoten v existiert, der mit mindestens sechs Kanten inzidiert, die jeweils mindestens vier Kreuzungen haben.

Dieser Knoten v kann nicht auf dem Rand der konvexen Hülle von $\overline{D}(K_8)$ liegen, denn sonst haben zwei der sieben mit v inzidenten Kanten keine Kreuzung.

Wenn v außerhalb der konvexen Hülle dieser sechs Knoten liegt, dann ist $x = 0$ für (3.4), und zwei der sechs Kanten von v haben zusammen nur vier Kreuzungen.

Angenommen, der Knoten v liegt in einem Dreieck $v_1 v_2 v_3$. Die drei Geraden durch v und jeweils eine Ecke des Dreiecks bestimmen die sechs Winkelbereiche A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 beziehungsweise C_2 , in denen a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 beziehungsweise c_2 Knoten liegen (siehe Abbildung 6.7).

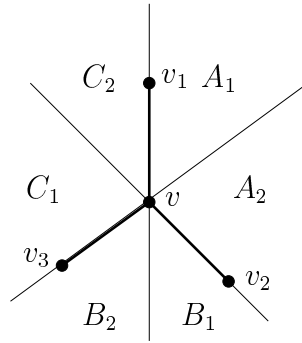


Abbildung 6.7.

Es soll $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $c = c_1 + c_2$ und $a \leq b \leq c$ gelten. Jede Kante, deren Knoten bezüglich jeder der drei Geraden in verschiedenen Halbebenen liegen, kann zwei der drei Kanten (v, v_1) , (v, v_2) und (v, v_3) kreuzen. Liegen zwei Knoten in einem der drei Winkelbereiche, die von den Halbgeraden von v durch die Ecken des Dreiecks bestimmt werden, so kann deren Kante weder (v, v_1) noch (v, v_2) oder (v, v_3) schneiden. Alle restlichen Kanten haben höchstens eine Kreuzung mit einer der drei Kanten. Damit sind die Anzahlen der Kreuzungen auf zwei der drei Kanten (v, v_1) , (v, v_2) und (v, v_3) wie folgt beschränkt:

$$\begin{aligned}
 S_{12} &\leq a(b + c + 1) + 2b_1c_2 + b_1 + c_2 && \text{Kreuzungen auf } (v, v_1) \text{ und } (v, v_2), \\
 S_{23} &\leq b(a + c + 1) + 2a_2c_1 + a_2 + c_1 && \text{Kreuzungen auf } (v, v_2) \text{ und } (v, v_3) \text{ und} \\
 S_{13} &\leq c(a + b + 1) + 2a_1b_2 + a_1 + b_2 && \text{Kreuzungen auf } (v, v_1) \text{ und } (v, v_3).
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Mit $a + b + c = a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = n - 4$ haben die drei Kanten zusammen maximal

$$S_{123} \leq n - 4 + ab + ac + bc + a_1b_2 + a_2c_1 + b_1c_2 \tag{6.3}$$

Kreuzungen.

Falls eine der Summen S_{ij} kleiner als $2(s + 1)$ ist, oder $S_{123} < 3(s + 1)$ gilt, so hat eine der drei Kanten weniger als $s + 1$ Kreuzungen.

Im Fall $n = 8$ werden die vier Knoten auf die sechs Winkelbereiche verteilt. Falls $a = b = 0$ mit $c = 4$, so folgt $S_{12} \leq 0(0 + 4 + 1) + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 + 4 = 4 < 8 = 2(s + 1)$. Wenn $a = 0$, $b = 1$ mit $c = 3$ angenommen wird, dann ist $S_{23} \leq 7$. Im Fall $a = 0$ und $b = 2$ ist $c = 2$ und damit $S_{23} \leq 6$ für $c_1 = 0$ und $c_1 = 1$, und für $c_1 = 2$ gilt $S_{12} \leq 2$. Es bleibt der Fall $a = b = 1$ mit $c = 2$. Für $a_1 = 0$ ist $S_{13} \leq 7$, und sonst gilt $S_{23} \leq 6$.

Also hat in jedem Fall mindestens eine der drei Kanten (v, v_1) , (v, v_2) oder (v, v_3) weniger als vier Kreuzungen, und es folgt $r_3(8) = 8$.

$r_4(8) = 8$: Aus Satz 3 mit $i = 2$ folgt $r_4(8) \leq 8$. Nach (3.1) und $r_3(8) = 8$ gilt $r_4(8) \geq 8$, also $r_4(8) = 8$.

$r_s(8) = 16$ mit $s = 5, 6, 7$: Nach Satz 3 mit $i = 1$ gilt $r_s(8) \leq 16$ für $5 \leq s \leq 7$. Wenn eine Darstellung existiert, für die $r_s(n) \leq 15$ gilt, so gibt es nach (6.1) mit $r \leq 15$ mindestens

einen Knoten v , der mit mindestens vier Kanten inzidiert, die jeweils $s + 1$ Kreuzungen besitzen. Liegt v außerhalb der konvexen Hülle der vier Endknoten dieser Kanten, so folgt analog zu Fall 1 von Satz 4 mit $i = 1$, daß eine Kante von v zu einem der vier Knoten weniger als $s + 1$ Kreuzungen hat.

Für den Fall, daß v im Inneren der konvexen Hülle der vier Knoten liegt, wurde schon in dem Beweis für $r_3(8)$ gezeigt, daß dann eine Kante mit weniger als vier Kreuzungen mit v inzidiert. Daraus folgt $r_s(8) \geq 16$ für $5 \leq s \leq 7$ und somit $r_s(8) = 16$.

$r_8(8) = 24$: Aus (3.3) folgt $r_8(8) = 24$.

$r_s(8) = 28$ mit $s \geq 9$: Für $s \geq 9$ gilt $r_s(8) = 28$ nach (3.2).

6.3 Werte für $r_s(9)$

$r_1(9) = 6$: Aus Abbildung A.1 folgt $r_1(9) \leq 6$.

Für eine Abschätzung nach unten bleiben nach Satz 6 nur Darstellungen $\overline{D}^5(K_9)$ mit dem Fünfeck $v_1v_2v_3v_4v_5$ auf dem Rand der konvexen Hülle zu betrachten. Liegt mindestens ein innerer Knoten nicht in dem Zentralgebiet Z , so folgt aus Lemma 6, daß mindestens sechs ungekreuzte Kanten in $\overline{D}^5(K_9)$ vorkommen. Es wird also angenommen, daß sich die inneren vier Knoten in Z befinden.

Zu jeder der Diagonalen des Fünfecks hat einer der Knoten in Z den größten Abstand. Daher hat mindestens einer der vier Knoten in Z , etwa w_1 , zu zwei knotendisjunkten Diagonalen des Fünfecks jeweils den größten Abstand.

Angenommen, w_1 hat unter allen Knoten in Z die größten Abstände zu (v_1, v_4) und (v_2, v_5) , siehe Abbildung 6.8.

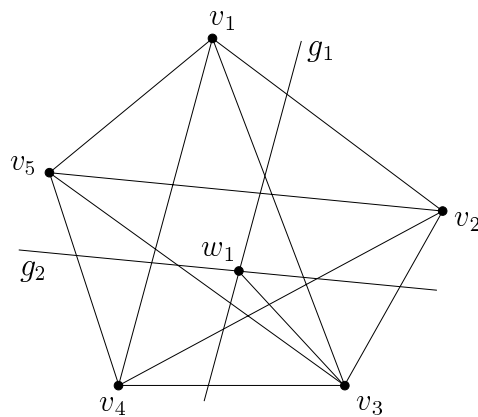


Abbildung 6.8.

Die zu (v_1, v_4) beziehungsweise (v_2, v_5) parallelen Geraden g_1 beziehungsweise g_2 durch w_1 teilen die Ebene so, daß nur v_2 und v_3 beziehungsweise v_3 und v_4 in einer Halbebene liegen. Daher hat (v_3, w_1) nur die eine Kreuzung mit (v_2, v_4) . Es folgt, daß mindestens sechs Kanten mit jeweils höchstens einer Kreuzung in $\overline{D}^5(K_9)$ vorkommen, so daß $r_1(9) = 6$ gilt.

$r_4(9) = 9$: Aus Satz 3 mit $i = 2$ folgt $r_4(9) \leq 9$.

Wenn es eine Darstellung mit mehr Kanten gibt, die jeweils $s + 1$ Kreuzungen haben, also $r_4(9) \leq 8$ gilt, dann hat diese Darstellung nach (6.1) mit $r \leq 8$ mindestens einen Knoten v , der mit mindestens sieben Kanten mit jeweils mindestens fünf Kreuzungen inzidiert. Dieser Knoten kann nicht außerhalb der konvexen Hülle der sieben Knoten liegen, weil sonst analog zu Fall 1 des Beweises von Satz 5 mit $i = 2$ folgt, daß von v mindestens zwei Kanten mit weniger als fünf Kreuzungen ausgehen.

Es kann also angenommen werden, daß v in einem Dreieck $v_1v_2v_3$ liegt, wobei (v, v_1) , (v, v_2) und (v, v_3) mindestens fünf Kreuzungen haben. Die restlichen fünf Knoten der Darstellung werden auf die sechs Winkelbereiche aufgeteilt (Abbildung 6.7), welche von den Geraden durch v und jeweils einer Ecke des Dreiecks bestimmt werden. Wird jede Aufteilung dieser Knoten auf die Winkelbereiche berücksichtigt, so folgt mit (6.2) und (6.3), daß für $a = b = 0$ mit $c = 5$ die Summe $S_{12} \leq 5 < 10 = 2(s + 1)$ ist. Für $a = 0$ und $b = 1$ mit $c = 4$ ist $S_{13} \leq 9$. Wenn $a = 0$ und $b = 2$, also $c = 3$, gewählt wird, so gilt $S_{12} \leq 3$ für $b_1 = 0$. Für $b_1 = 1$ folgt $S_{123} \leq 14 < 15 = 3(s + 1)$, und für $b_1 = 2$ ist $S_{13} \leq 9$. Falls $a = b = 1$ mit $c = 3$, so gilt $S_{12} \leq 8$ mit $b_1 = 0$, und für $b_1 = 1$ und $a_1 = 0$ ist $S_{13} \leq 9$. Im Fall $b_1 = 1$ und $a_1 = 1$ folgt $S_{23} \leq 8$. Schließlich bleibt der Fall $a = 1$ und $b = 2$ mit $c = 2$ zu untersuchen. Für $b_1 = 0$ gilt $S_{12} \leq 7$. Wenn $b_1 = 1$, so folgt $S_{23} \leq 9$ mit $c_1 = 0$ und $S_{12} \leq 6$ mit $c_1 = 2$. Für $b_1 = c_1 = 1$ gilt $S_{12} \leq 9$. Falls $b_1 = 2$, dann folgt $S_{13} \leq 9$.

Daraus folgt, daß in $\overline{D}(K_9)$ von keinem Knoten drei Kanten ausgehen, die jeweils fünf Kreuzungen haben, also $r_4(9) \geq 9$ und damit $r_4(9) = 9$.

$r_5(9) = 9$: Aus $r_4(9) = 9$ und (3.1) folgt $r_5(9) \geq 9$. Wegen Satz 3 mit $i = 2$ gilt $r_5(9) \leq 9$, also $r_5(9) = 9$.

$r_6(9) = 18$: Aus Satz 3 mit $i = 1$ folgt $r_6(9) \leq 18$.

Für die Abschätzung nach unten wird angenommen, daß $r_6(9) \leq 17$ gilt. Dann gibt es nach (6.1) mit $r \leq 17$ mindestens einen Knoten v , der zu fünf Knoten v_1, v_2, v_3, v_4 und v_5 benachbart ist, so daß die Kanten von v zu diesen Knoten jeweils mindestens sieben Kreuzungen haben. Wenn v außerhalb der konvexen Hülle dieser fünf Knoten liegt, dann folgt analog zu Fall 1 des Beweises von Satz 5 mit $i = 1$, daß mindestens eine der fünf Kanten weniger als sieben Kreuzungen hat.

Es wird nun angenommen, daß sich v innerhalb der konvexen Hülle der fünf Knoten befindet, also liegt v in einem Dreieck, etwa $v_1v_2v_3$, wobei (v, v_1) , (v, v_2) und (v, v_3) jeweils mindestens sieben Kreuzungen haben. Wie im Beweis für $r_4(9)$ gezeigt, hat eine der drei Kanten weniger als fünf Kreuzungen. Also gilt $r_6(9) \geq 18$.

$r_s(9) = 18$ mit $7 \leq s \leq 9$: Nach Satz 3 mit $i = 1$ gilt $r_s(9) \leq 18$ für $s \leq 9$. Aus $r_6(9) = 18$ folgt wegen (3.1), daß $r_s(9) \geq 18$ für $s \geq 7$, also $r_s(9) = 18$ für $7 \leq s \leq 9$.

$r_{10}(9) = 27$: Die Schranke $r_{10}(9) \leq 27$ folgt aus Satz 3 mit $i = 0$.

Angenommen, es gilt $r_{10}(9) \leq 26$, dann gibt es nach (6.1) einen Knoten v , der mit drei Kanten inzidiert, welche jeweils mindestens elf Kreuzungen haben. Analog zu Fall 1 des Beweises von Satz 5 mit $i = 0$ folgt, daß eine dieser Kanten weniger als elf Kreuzungen hat, wenn v außerhalb der konvexen Hülle der drei Endknoten der Kanten liegt. Befindet sich v

in dem Dreieck, daß von den drei Knoten aufgespannt wird, so folgt aus dem Beweis für $r_4(9)$, daß eine der Kanten höchstens drei Kreuzungen hat. Also gilt $r_{10}(9) \geq 27$ und damit $r_{10}(9) = 27$.

6.4 Werte für $r_s(10)$

$r_1(10) = 6$: Aus Abbildung A.1 folgt $r_1(10) \leq 6$.

Wie im Fall $r_1(9)$ sind nur Darstellungen mit fünf Knoten auf dem Rand der konvexen Hülle zu betrachten. Wenn im Zentralgebiet Z von $\overline{D}^5(K_{10})$ ein Knoten zu zwei Diagonalen jeweils den größten Abstand hat, dann folgt mit der gleichen Argumentation wie im Beweis für $r_1(9)$, daß sechs Kanten mit weniger als zwei Kreuzungen in der Darstellung vorkommen. Also ist die konvexe Hülle der Knoten in Z ein Fünfeck, so daß jeder Knoten w_i in Z auf genau einer Geraden liegt, die parallel zu der Diagonalen ist, zu der w_i den größten Abstand hat, wie in Abbildung 6.9.

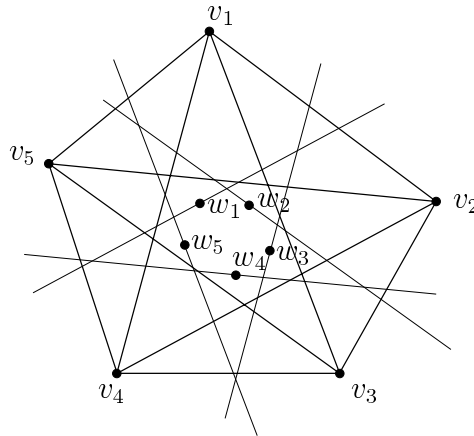


Abbildung 6.9.

Die Kante (v_1, w_1) wird gekreuzt von (v_2, v_5) . Eine weitere Kreuzung auf (v_1, w_1) ist nur möglich, wenn w_2 mit v_1, v_5 und w_1 ein konvexes Viereck bildet. Dann hat (v_1, w_1) mindestens mit (v_1, w_2) eine zweite Kreuzung. Analog wird gefolgert, daß w_1 mit v_1, v_2 und w_2 ein konvexes Viereck bilden muß, damit (v_1, w_2) mindestens zwei Kreuzungen hat. Dann ist $v_1 v_2 w_2 w_1 v_5$ ein konvexes Fünfeck. Aus Gründen der Symmetrie gilt dies für jedes Knotenpaar zweier Knoten, die auf dem Fünfeck in Z benachbart sind. Dann geht von jedem Knoten in Z nur eine Kante aus, die durch das Fünfeck in Z läuft. Daraus folgt, daß auf den fünf Kanten des Fünfecks in Z insgesamt höchstens fünf Kreuzungen sind. Also gilt $r_1(10) \geq 5$.

$r_7(10) = 20$: Nach Satz 3 mit $i = 2$ folgt $r_7(10) \leq 20$.

Angenommen, es gilt $r_7(10) \leq 19$. Dann gibt es nach (6.1) mit $r \leq 19$ in $\overline{D}(K_{10})$ mindestens einen Knoten v , der mit mindestens sechs Kanten inzidiert, die jeweils mehr

als s Kreuzungen haben. Liegt v außerhalb der konvexen Hülle der sechs Endknoten dieser Kanten, so folgt analog zu Fall 1 des Beweises von Satz 4 mit $i = 2$, daß mindestens eine der sechs Kanten weniger als acht Kreuzungen hat.

Wenn v in einem Dreieck $v_1v_2v_3$ liegt, wobei (v, v_1) , (v, v_2) und (v, v_3) jeweils mindestens $s + 1$ Kreuzungen haben, dann kann mit (6.2) gezeigt werden, daß eine der drei Kanten weniger als acht Kreuzungen hat. Für $a = b = 0$ mit $c = 6$ folgt, daß $S_{12} \leq 6 < 16 = 2(s + 1)$. Falls $a = 0$ und $b = 1$, also $c = 5$, so gilt $S_{13} \leq 11$. Im Fall $a = 0$ und $b = 2$, und damit $c = 4$, folgt $S_{23} \leq 14$. Wenn $a = 0$ und $b = 3$ mit $c = 3$, so ist $S_{23} \leq 15$. Für $a = b = 1$ mit $c = 4$ gilt $S_{13} \leq 13$, falls $a_1 = 0$, und es ist $S_{23} \leq 10$ für $a_1 = 1$. Falls $a = 1$ und $b = 2$ mit $c = 3$, dann ist $S_{13} \leq 14$ für $a_1 = 0$, und für $a_1 = 1$ folgt $S_{23} \leq 13$. Es bleibt nur noch der Fall $a = b = 2$ mit $c = 2$ zu betrachten. Für $a_1 = 0$ folgt $S_{13} \leq 12$. Falls $a_1 = 1$ ist, so gilt $S_{12} \leq 12$ für $b_1 = 0$, und es ist $S_{13} \leq 14$ für $b_1 \geq 1$. Im Fall $a_1 = 2$ folgt $S_{23} \leq 12$. Also gilt $r_7(10) \geq 20$.

Damit ist $r_7(10) = 20$ bewiesen.

$r_s(10) = 20$ mit $8 \leq s \leq 10$: Wegen (3.1) und $r_7(10) = 20$ gilt $r_s(10) \leq 20$ für $s \geq 8$. Aus Satz 3 mit $i = 2$ folgt $r_s(10) \leq 20$ für $s \leq 8, 9$. Dann ist $r_s(10) = 20$ für $8 \leq s \leq 10$.

6.5 Werte für $r_s(11)$

$r_9(11) = 22$: Aus Satz 3 mit $i = 2$ folgt $r_9(11) \leq 22$.

Falls $r_9(11) \leq 21$ gilt, dann gibt es nach (6.1) mit $r \leq 21$ in $\overline{D}(K_{11})$ mindestens einen Knoten v , der mit mindestens sieben Kanten inzidiert, die jeweils mehr als neun Kreuzungen haben. Wenn v außerhalb der konvexen Hülle der sieben Endknoten dieser Kanten liegt, so folgt analog zu Fall 1 des Beweises von Satz 5 mit $i = 2$, daß mindestens eine der sieben Kanten weniger als neun Kreuzungen hat.

Angenommen, v liegt in einem Dreieck $v_1v_2v_3$, wobei die Kanten von v zu den Ecken des Dreiecks jeweils mindestens neun Kreuzungen haben. Dann kann mit (6.2) gezeigt werden, daß eine der drei Kanten weniger als $s + 1$ Kreuzungen hat. Im Fall $a = b = 0$ mit $c = 7$ folgt, daß $S_{12} \leq 7 < 18 = 2(s + 1)$. Für $a = 0$ und $b = 1$, also $c = 6$, ist $S_{23} \leq 13$. Wenn $a = 0$ und $b = 2$ mit $c = 5$, dann gilt $S_{23} \leq 17$. Falls $a = 0$ und $b = 3$, also $c = 4$, ist $S_{12} \leq 13$ für $b_1 \leq 1$, und es gilt $S_{13} \leq 17$ für $b_1 \geq 2$. Im Fall $a = b = 1$ mit $c = 5$ folgt $S_{13} \leq 16$ für $a_1 = 0$, und es gilt $S_{23} \leq 12$ für $a_1 = 1$. Für $a = 1$ und $b = 2$ mit $c = 4$ folgt für $a_1 = b_1 = 0$, daß $S_{12} \leq 11$, und für $a_1 = 1$ und $b_1 \geq 1$ gilt $S_{13} \leq 17$. Wenn $a_1 = 1$, dann gilt $S_{23} \leq 16$. Angenommen, es ist $a = 1$ und $b = 3$, also $c = 3$, dann folgt $S_{12} \leq 17$ für $b_1 \leq 1$. Im Fall $b_1 = 2$ und $c_1 = 0$ ist $S_{23} \leq 16$. Wenn $b_1 = 2$ und $c_1 = 1$, dann gilt $S_{13} \leq 16$ für $a_1 = 0$, und es ist $S_{23} \leq 16$ für $a_1 = 1$. Für $b_1 = 2$ und $c_2 \geq 2$ folgt $S_{12} \leq 13$. Im Fall $b_1 = 3$ gilt $S_{13} \leq 16$. Schließlich bleibt der Fall $a = b = 2$ mit $c = 3$ zu betrachten. Wenn $a_1 = 0$, dann gilt $S_{13} \leq 17$. Für $a_1 = 1$ und $b_1 = 0$ folgt $S_{12} \leq 15$. Falls $a_1 = 1$ und $b_1 = 1$, so folgt $S_{23} \leq 16$ für $c_1 \leq 1$, und für $c_1 \geq 2$ ist $S_{12} \leq 16$. Wenn $a_1 = 1$ und $b_1 = 2$, dann folgt $S_{13} \leq 16$. Im Fall $a_1 = 2$ gilt $S_{23} \leq 15$.

$r_{10}(11) = 22$: Nach Satz 3 mit $i = 2$ folgt $r_{10}(11) \leq 22$. Wegen (3.1) und $r_9(11) = 22$ gilt $r_{10}(11) \geq 22$.

6.6 Zusammenfassung der bekannten Werte für $n \leq 20$ und $s \leq 10$

In Tabelle 1 werden die exakten Werte (fett) und die oberen Abschätzungen (kursiv) von $r_s(n)$ für $s = 0, 1, \dots, 10$ und $n = 2, 3, \dots, 20$ angegeben.

$s \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	1	3	4	5	5	6	5	5	5	...									
1	:	:	6	5	6	6	7	6	6	5	...								
2			:	10	6	7	7	8	8	8	7	6	6	6	6	6	5	...	
3				:	12	7	8	8	9	9	8	8	7	6	6	6	6	6	6
4					15	14	8	9	9	10	9	9	9	9	8	8	8	8	8
5					:	14	16	9	9	10	11	10	10	10	10	9	9	9	9
6						21	16	18	10	10	11	12	12	10	10	10	10	10	10
7						:	16	18	20	10	11	12	12	12	11	11	11	11	10
8							24	18	20	22	11	12	13	12	12	12	12	11	11
9							28	18	20	22	22	12	13	14	13	13	12	12	13
10							:	27	20	22	24	24	13	14	14	14	14	13	13

Tabelle 1.

Die Einträge in der folgenden Tabelle sind Referenzen der oberen Schranken für $r_s(n)$ aus Tabelle 1. In den Zellen sind die Nummern der entsprechenden Abbildungen beziehungsweise ein (a) oder ein (b) eingetragen, wobei die Werte für (a) aus Satz 3 und für (b) aus Korollar 2 folgen.

$s \backslash n$	≤ 6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	2.1	[18]	[18]	[18]	[18]										
1	2.1	A.1	A.1	A.1	A.1	5.1									
2	2.1	A.2	A.2	A.2	A.2	A.2	A.3	A.4	A.4	A.4	A.4	A.10	5.4		
3	2.1	A.5	A.5	A.5	A.6	A.6	A.7	A.7	A.8	A.9	A.10	A.10	A.10	A.10	A.10
4	2.1	(a)	(a)	(a)	(b)	(b)	A.11	A.12	A.13	A.13	A.14	A.14	A.14	A.14	A.14
5	2.1	(a)	(a)	(a)	(b)	(b)	(b)	A.15	A.16	A.17	A.17	A.18	A.19	A.19	A.19
6	2.1	(a)	(a)	(a)	(a)	(b)	(b)	(b)	A.20	A.17	A.17	A.21	A.21	A.22	A.23
7	2.1	(a)	(a)	(a)	(a)	(b)	(b)	(b)	A.20	A.24	A.25	A.25	A.26	A.27	A.23
8	2.1	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(b)	(b)	(b)	A.28	A.29	A.30	A.31	A.27	A.32
9	2.1	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(b)	(b)	(b)	(b)	A.33	A.34	A.31	A.35	A.36
10	2.1	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(b)	(b)	(b)	A.37	A.38	A.39	A.40	A.36

Tabelle 2.

Kapitel 7

Schlußbemerkungen

In dieser Arbeit wurden Darstellungen des vollständigen Graphen untersucht, in denen die minimale Anzahl $r_s(n)$ von Kanten mit jeweils höchstens s Kreuzungen vorkommen. Die Abschätzungen der Werte von $r_s(n)$ nach oben sind in den meisten Fällen durch geeignete Konstruktionen nachgewiesen worden. Untere Schranken sind im allgemeinen nur schwer zu zeigen.

Für Darstellungen mit mindestens fünf Knoten gilt $r_s(n) \geq 5$. Es konnte gezeigt werden, daß es zu jedem s für $n \geq \frac{5}{3}s^2 + O(s)$ Darstellungen $\overline{D}^5(K_n)$ gibt, in denen nur die Kanten auf dem Rand der konvexen Hülle weniger als $s + 1$ Kreuzungen haben.

Die Vermutung, daß $r_s(n) = 5$ schon für $n \geq s^2 + 4s + 6$ gilt, konnte nur für $s \leq 4$ nachgewiesen werden. Ein allgemeiner Beweis scheint über eine rein konstruktive Methode nur schwer durchführbar zu sein, da schon in den bekannten Darstellungen keine ausreichenden Regelmäßigkeiten zu erkennen sind.

Für die maximale Anzahl $H_s(n)$ mit jeweils höchstens s Kreuzungen in Darstellungen $D(K_n)$ wurden von HARBORTH und MENGERSEN in [15, 16] erste Ergebnisse erzielt. Es wurde unter anderem gezeigt, daß höchstens $2n - 2$ kreuzungsfreie Kanten in $D(K_n)$ vorkommen. Dies gilt auch für geradlinige Darstellungen [18].

Diese und ähnliche Probleme können natürlich auch auf andere Graphenklassen übertragen werden. Jedoch scheint es, als ob diese Fragen gerade für den vollständigen Graphen besonders schwer zu beantworten sind.

Anhang A

Abbildungen

Die Abbildungen in diesem Anhang weisen die oberen Schranken für die Werte von $r_s(n)$ in Tabelle 1 nach. Einige Abschätzungen sind in einer Abbildung zusammengefaßt, in dem in einer Darstellung Gebiete mit \oplus gekennzeichnet sind, so daß die Kanten von einem Knoten in einem solchen Gebiet immer die erforderliche Anzahl von Kreuzungen haben.

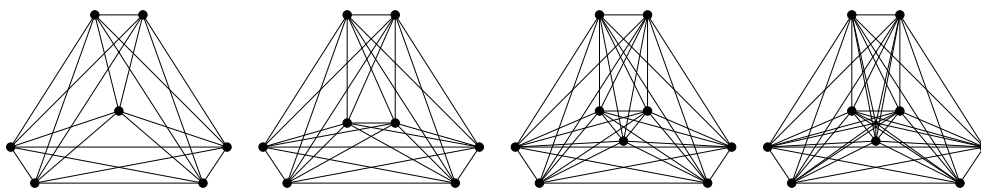


Abbildung A.1. $r_1(7) \leq 6$, $r_1(8) \leq 7$, $r_1(9) \leq 6$ und $r_1(10) \leq 6$.

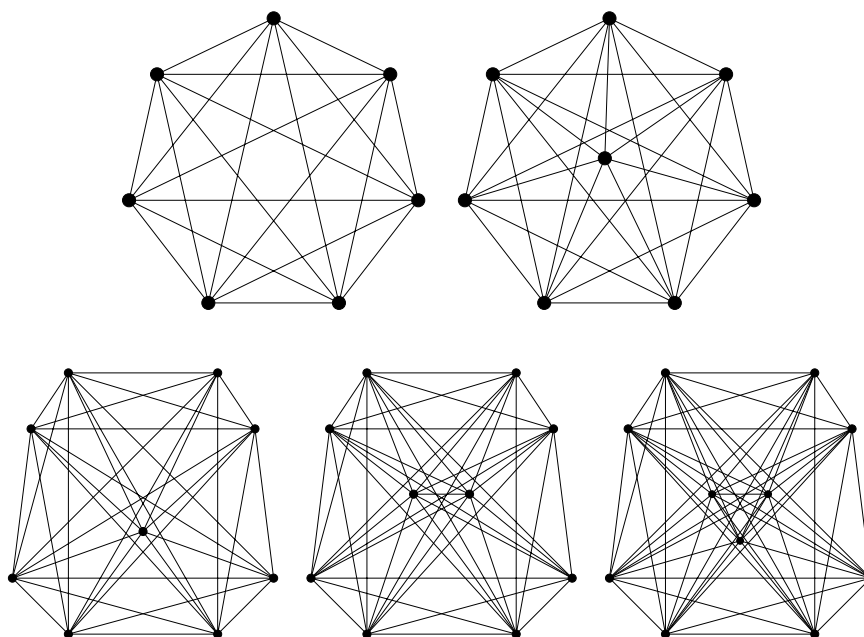


Abbildung A.2. $r_2(7) \leq 7$, $r_2(8) \leq 7$, $r_2(9) \leq 8$, $r_2(10) \leq 8$ und $r_2(11) \leq 8$.

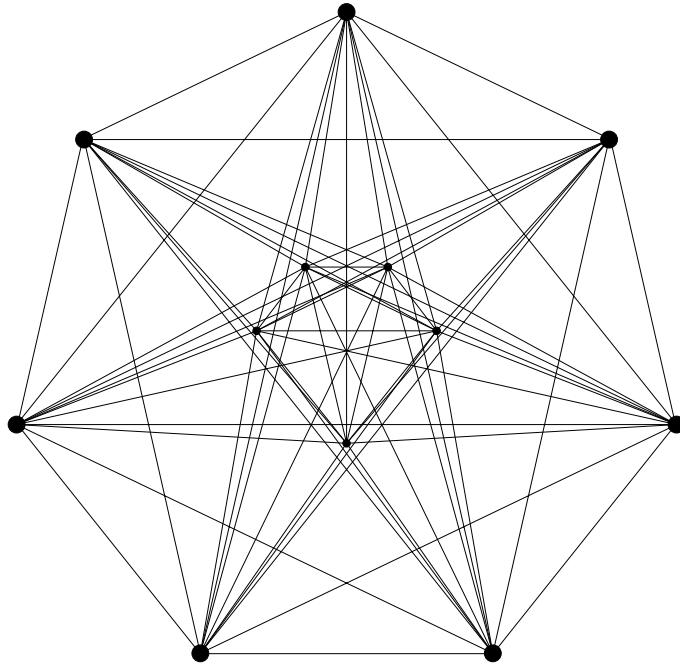


Abbildung A.3. $r_2(12) \leq 7$.

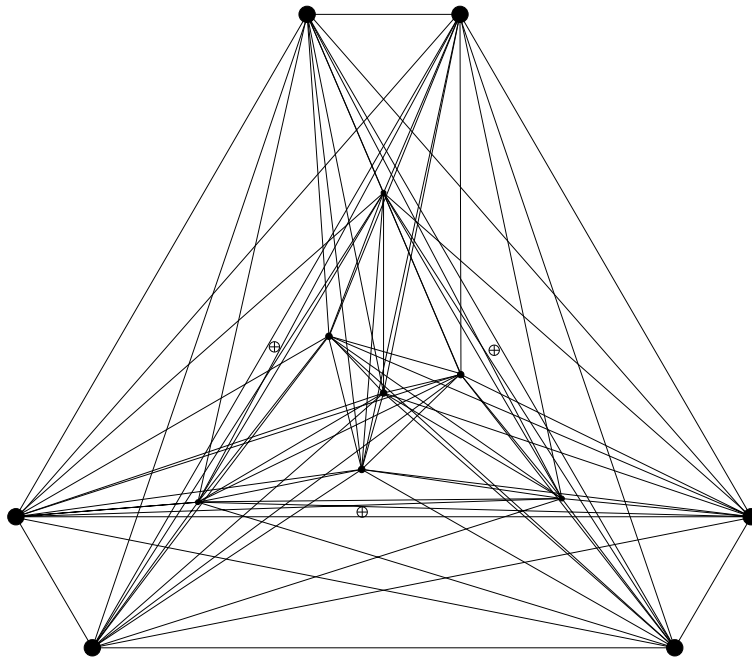


Abbildung A.4. $r_2(n) \leq 6$ für $13 \leq n \leq 16$.

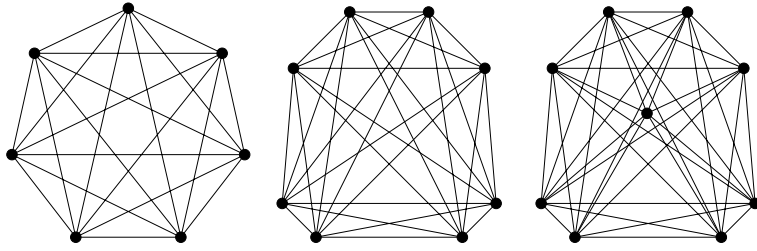


Abbildung A.5. $r_3(7) \leq 7$, $r_3(8) \leq 8$ und $r_3(9) \leq 8$.

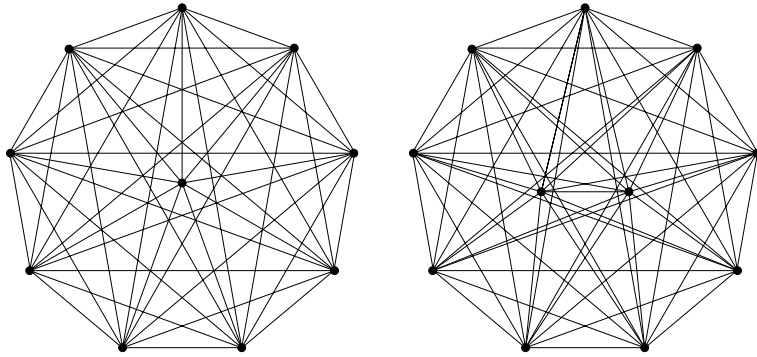


Abbildung A.6. $r_3(10) \leq 9$ und $r_3(11) \leq 9$.

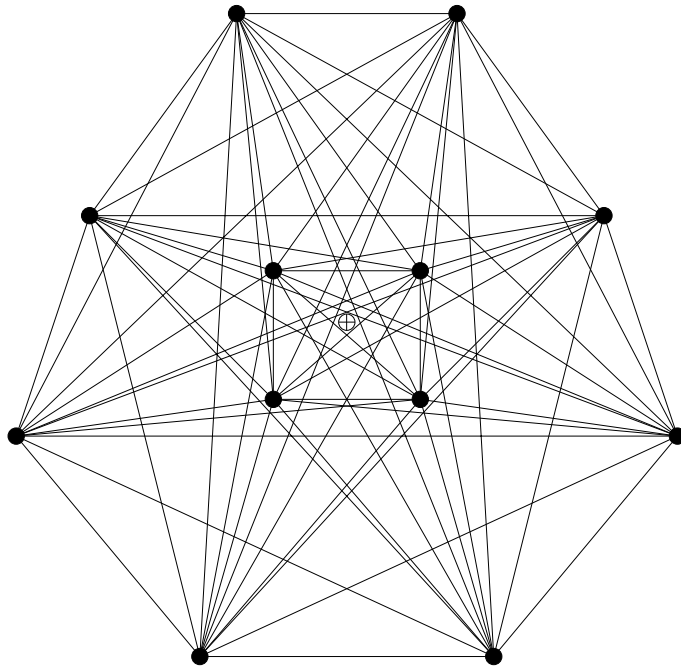


Abbildung A.7. $r_3(12) \leq 8$ und $r_3(13) \leq 8$.

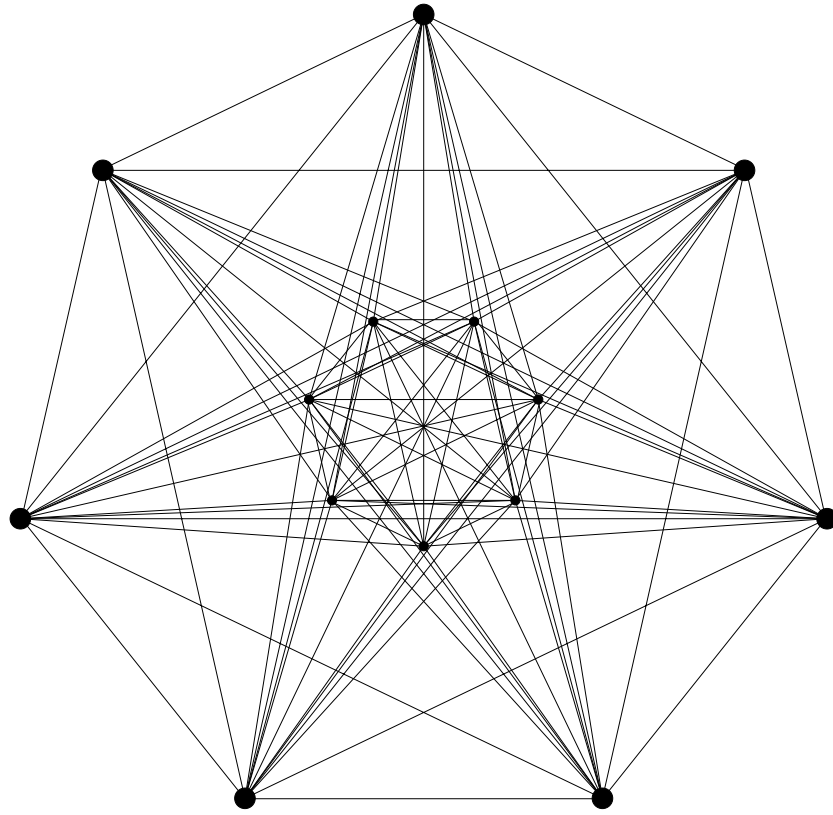


Abbildung A.8. $r_3(14) \leq 7$.

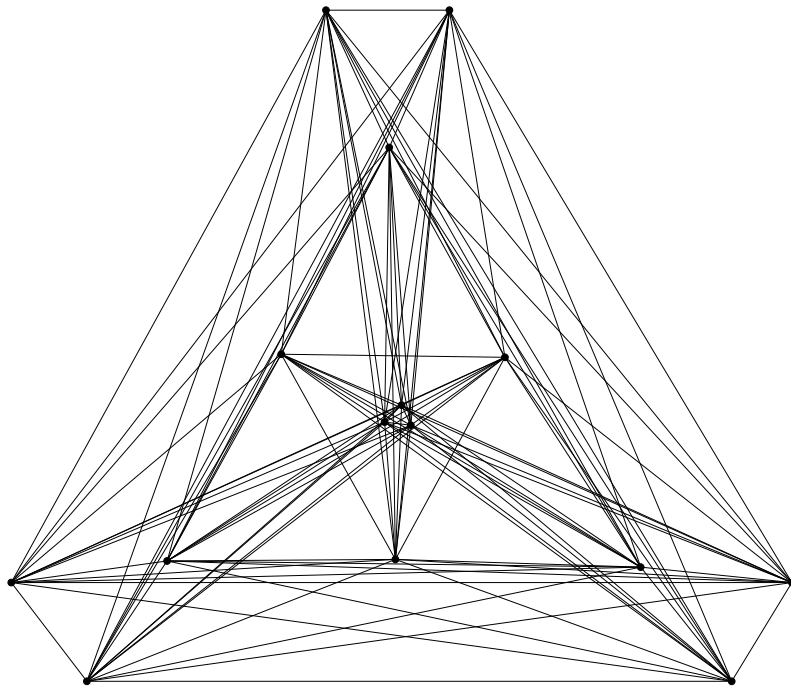


Abbildung A.9. $r_3(15) \leq 6$.

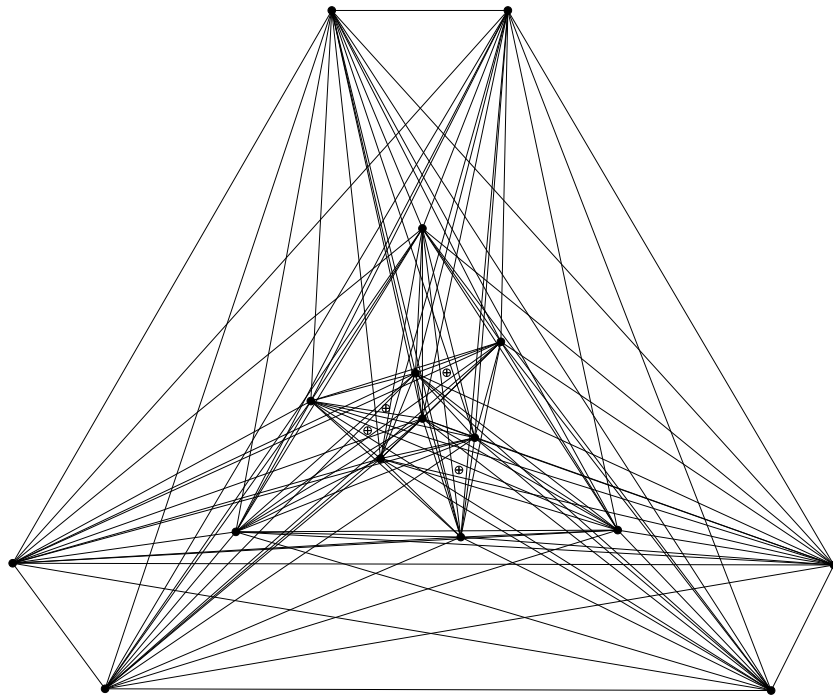


Abbildung A.10. $r_s(n) \leq 6$ für $16 \leq n \leq 20$ und $s \leq 3$.

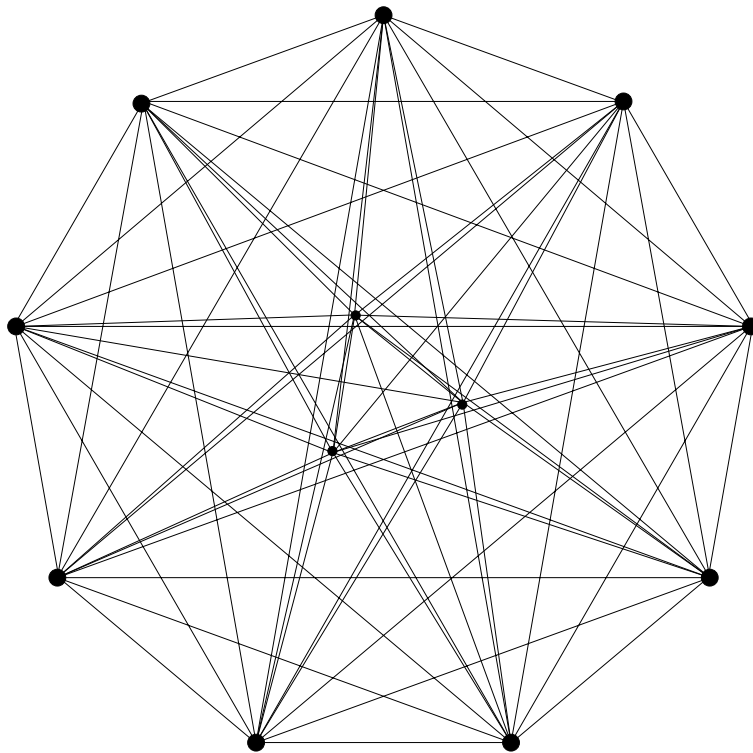


Abbildung A.11. $r_4(12) \leq 9$.

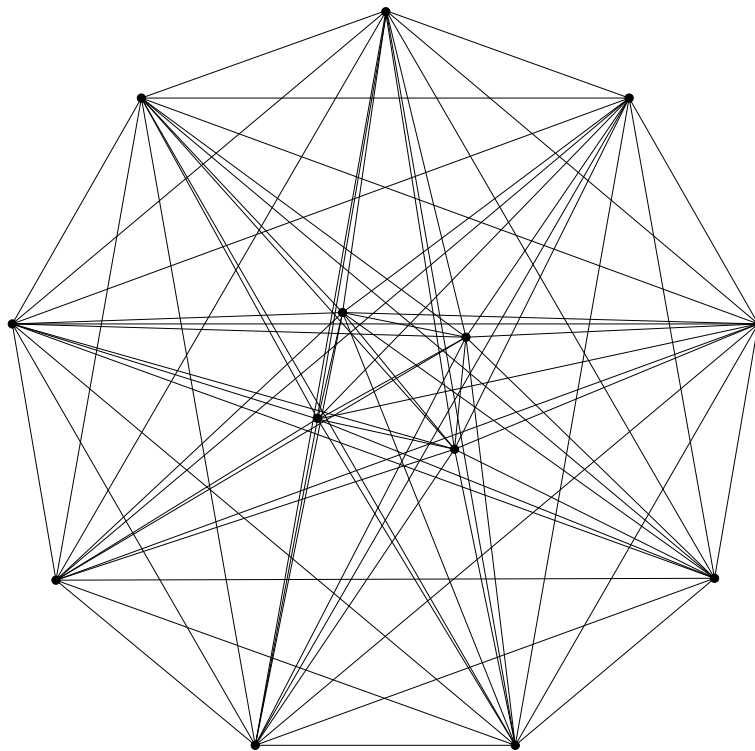


Abbildung A.12. $r_4(13) \leq 9$.

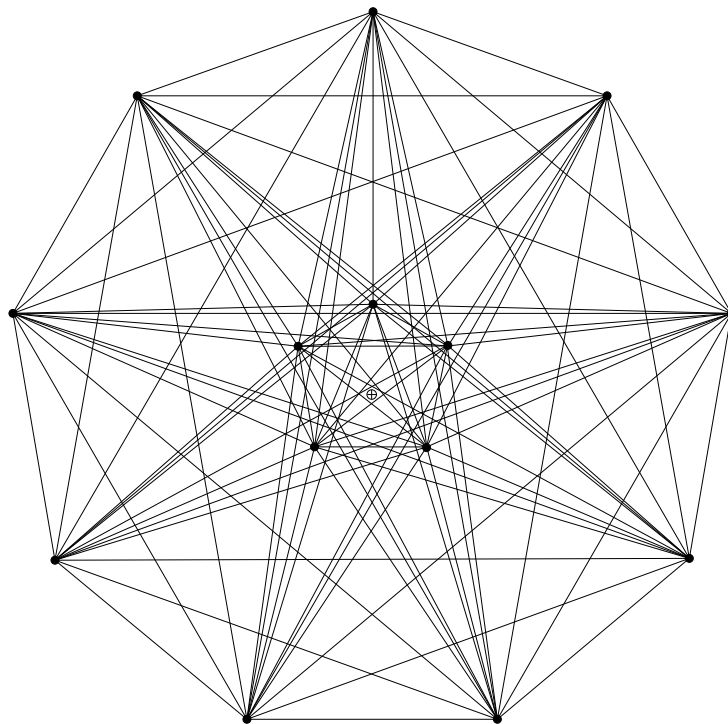


Abbildung A.13. $r_4(14) \leq 9$ und $r_4(15) \leq 9$.

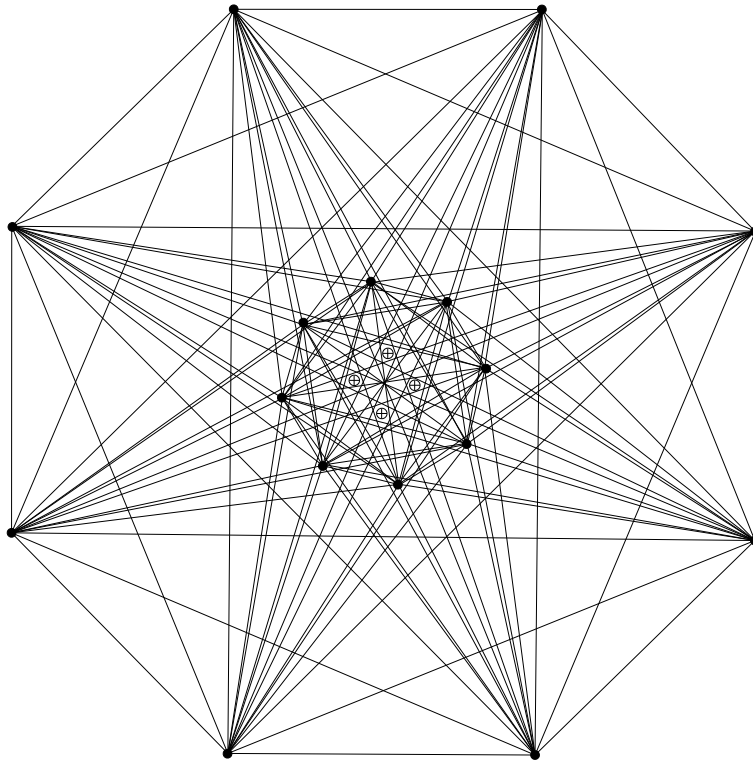


Abbildung A.14. $r_4(n) \leq 8$ für $16 \leq n \leq 20$.

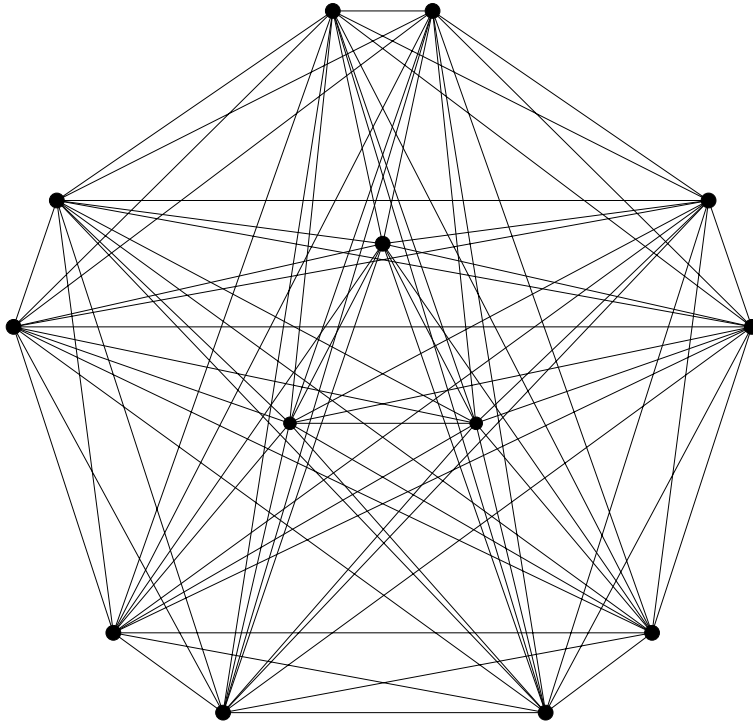


Abbildung A.15. $r_5(13) \leq 10$.

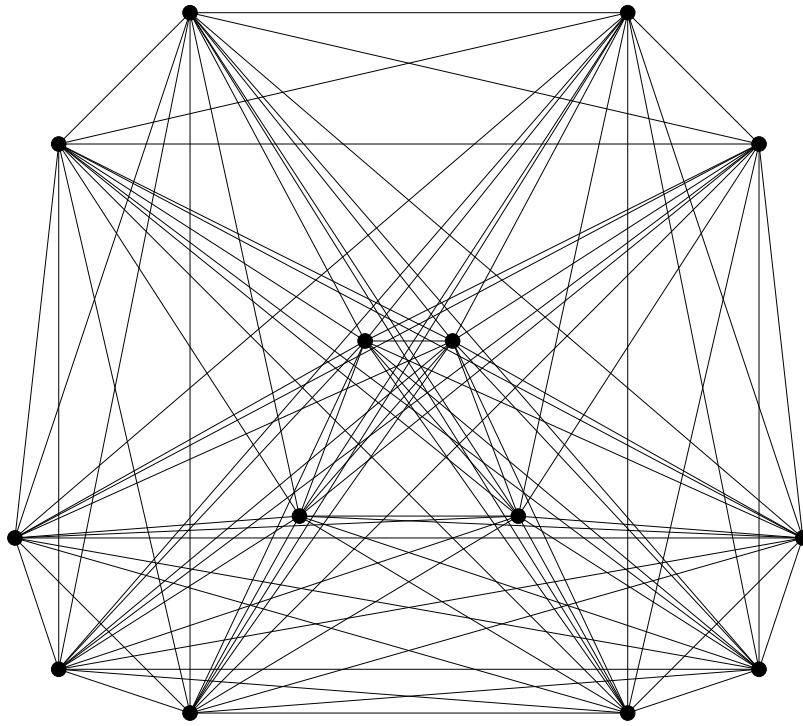


Abbildung A.16. $r_5(14) \leq 10$.

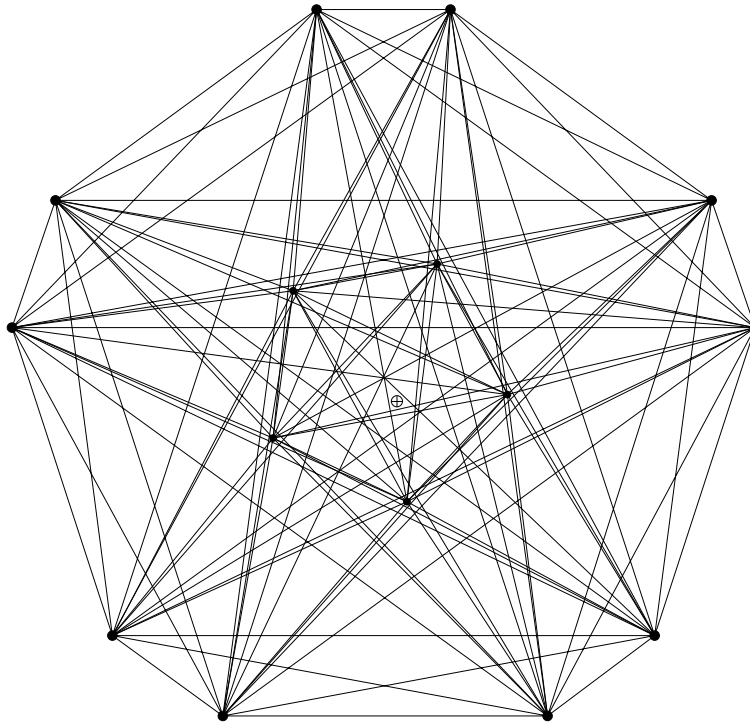


Abbildung A.17. $r_s(15) \leq 10$ und $r_s(16) \leq 10$ für $s \leq 6$.

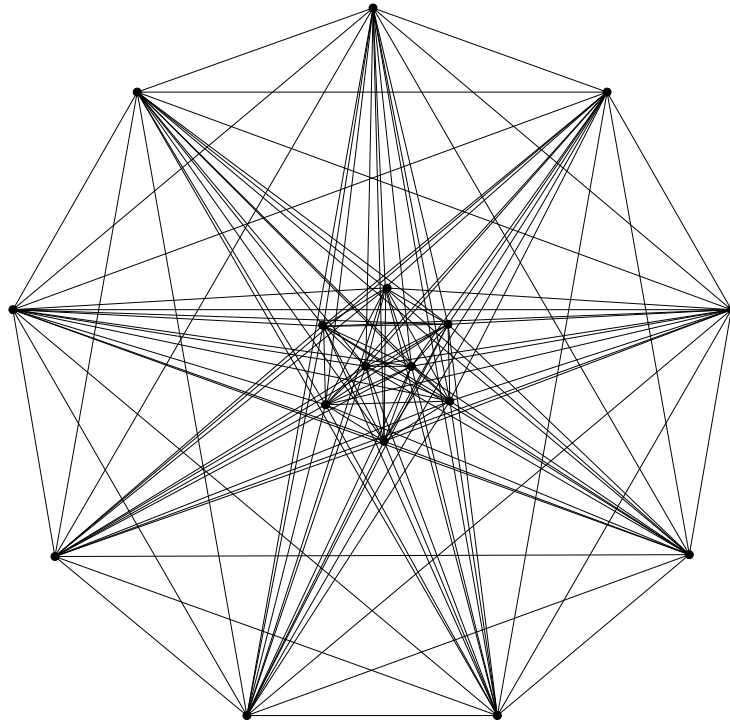


Abbildung A.18. $r_5(17) \leq 9$.

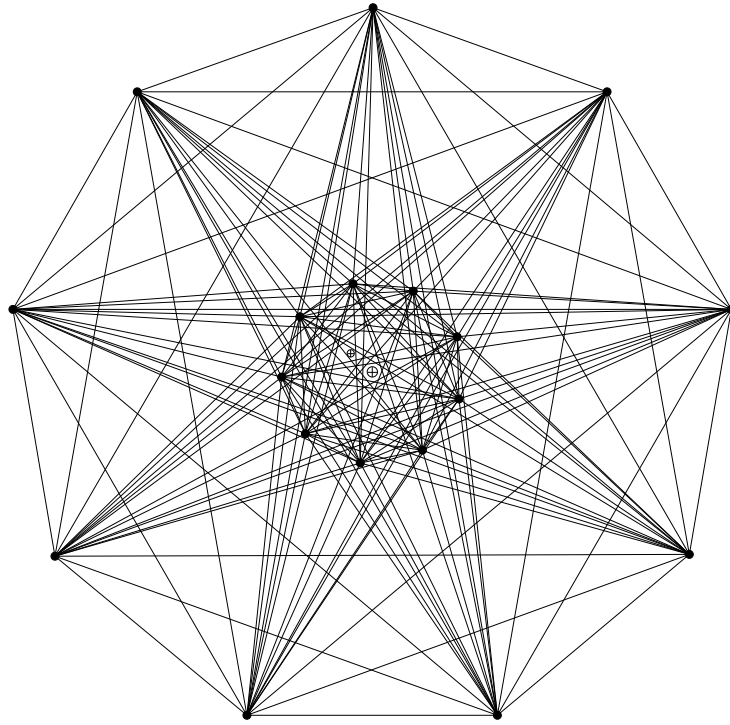


Abbildung A.19. $r_5(n) \leq 9$ für $18 \leq n \leq 20$.

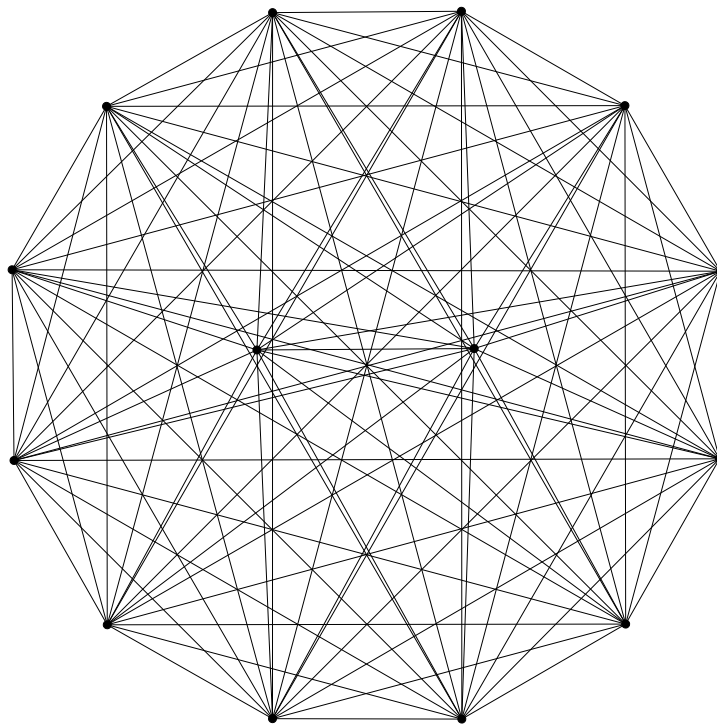


Abbildung A.20. $r_s(14) \leq 12$ für $s = 6, 7$.

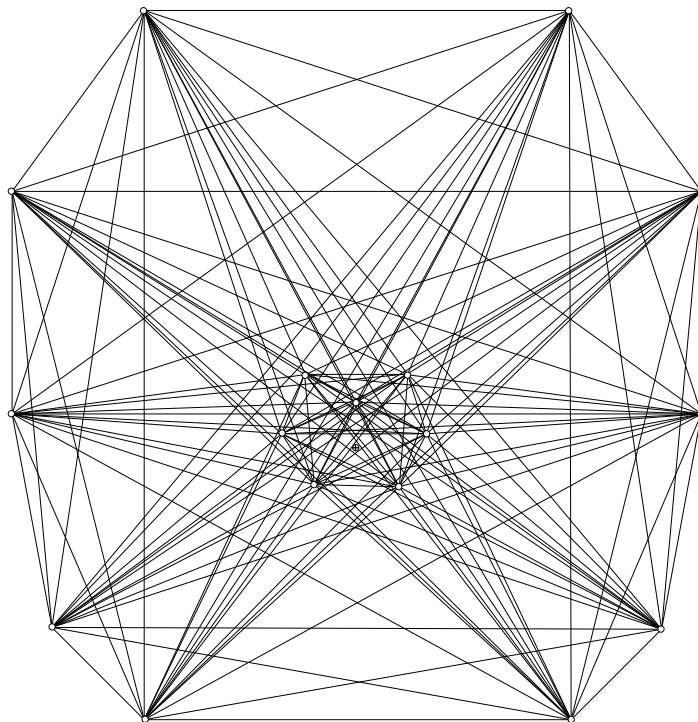


Abbildung A.21. $r_6(17) \leq 10$ und $r_6(18) \leq 10$.

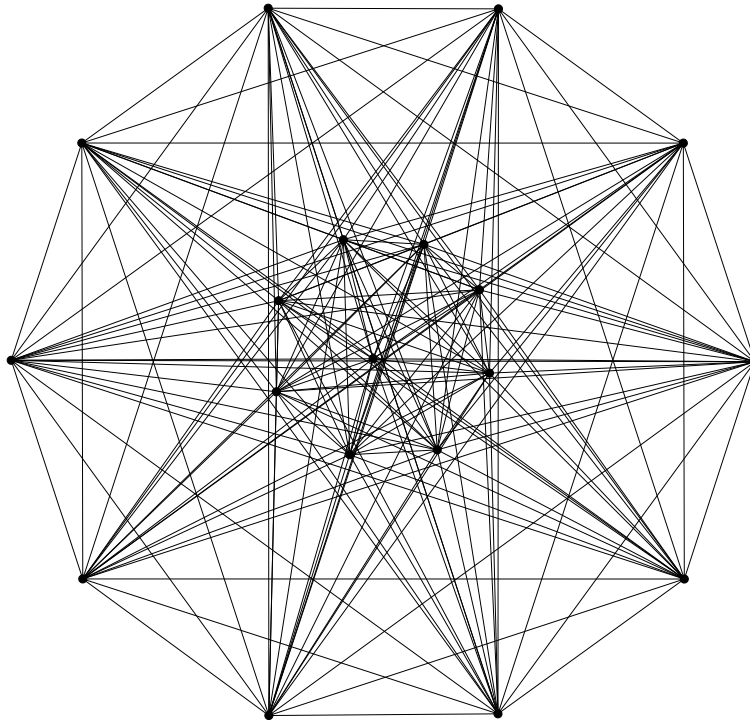


Abbildung A.22. $r_6(19) \leq 10$.

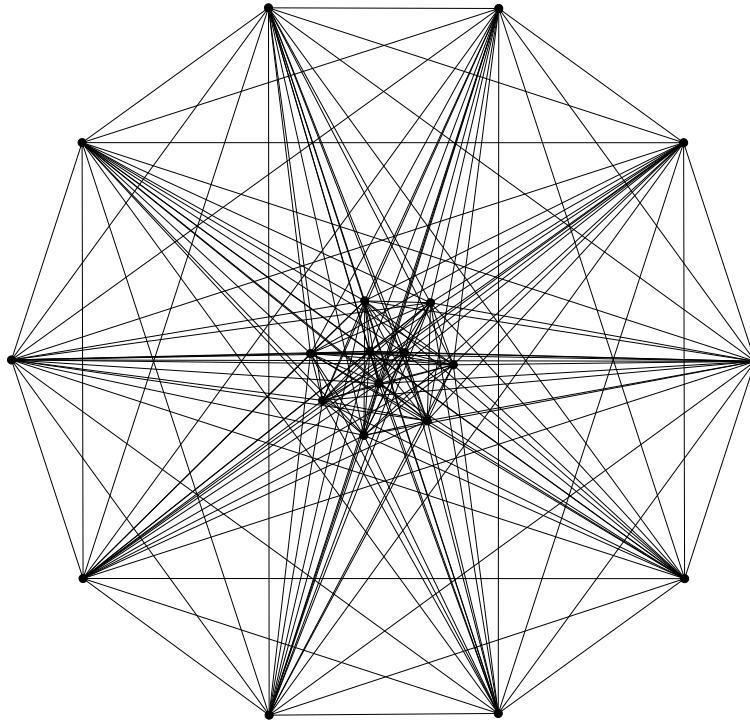


Abbildung A.23. $r_s(20) \leq 10$ für $s = 6, 7$.

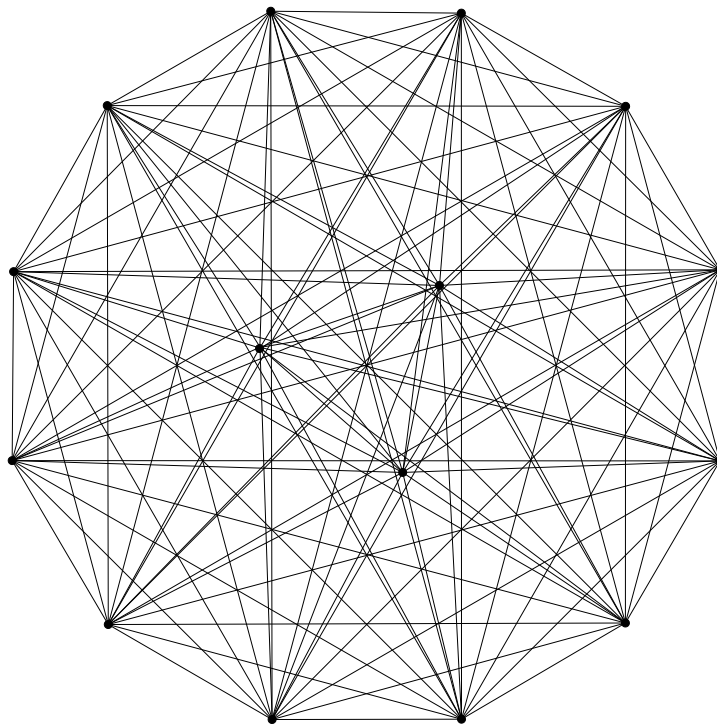


Abbildung A.24. $r_7(15) \leq 12$.

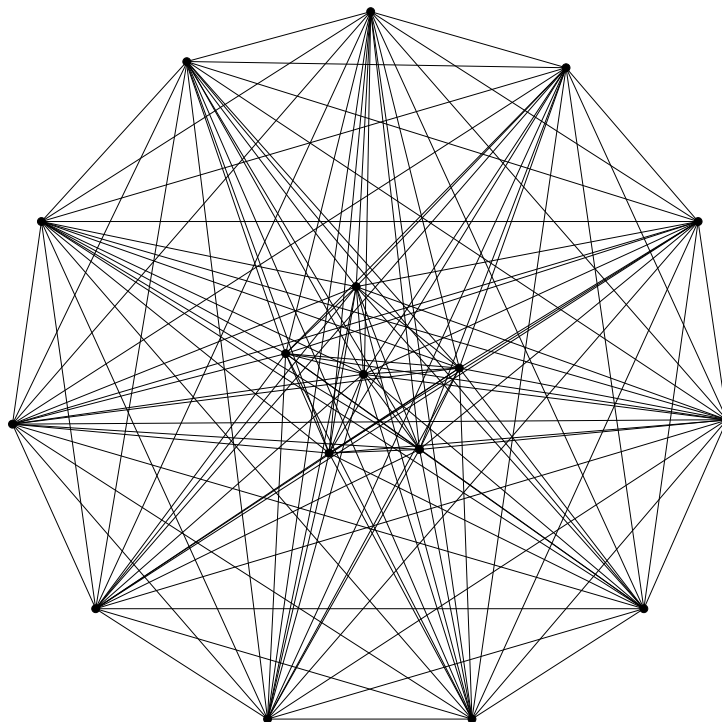


Abbildung A.25. $r_7(16) \leq 11$ und $r_7(17) \leq 11$.

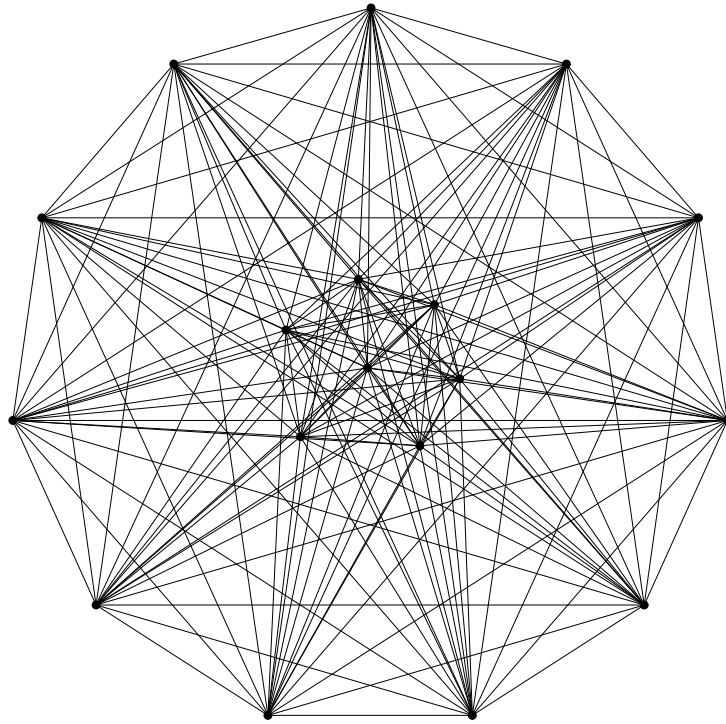


Abbildung A.26. $r_7(18) \leq 11$.

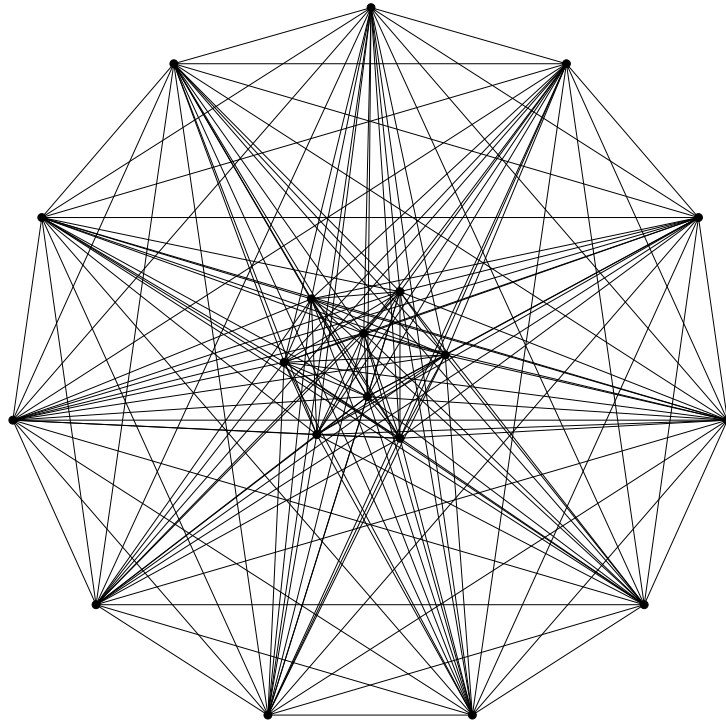


Abbildung A.27. $r_s(19) \leq 11$ für $s = 7, 8$.

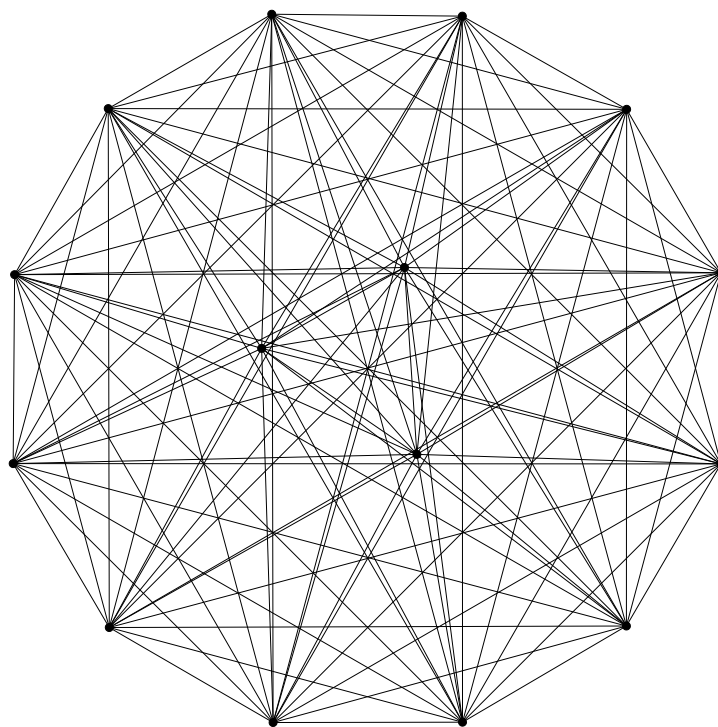


Abbildung A.28. $r_8(15) \leq 12$.

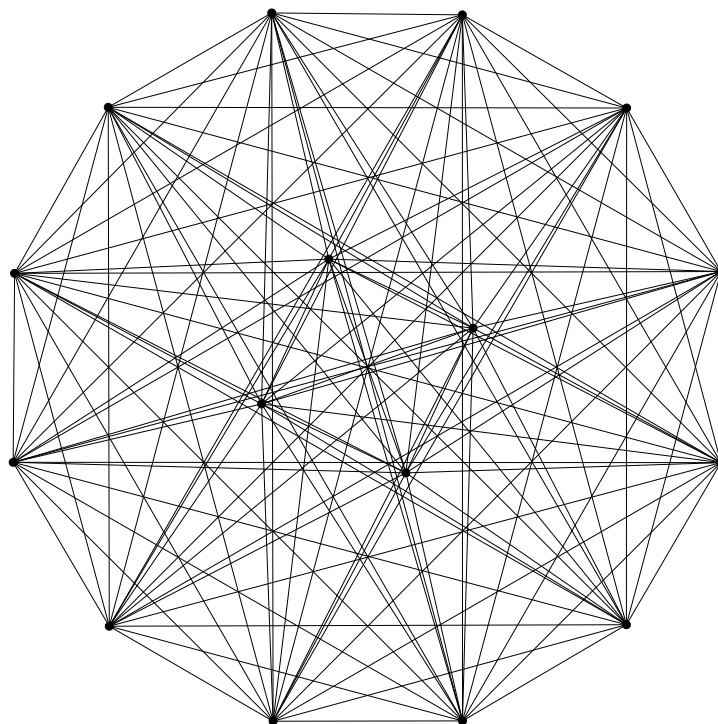


Abbildung A.29. $r_8(16) \leq 12$.

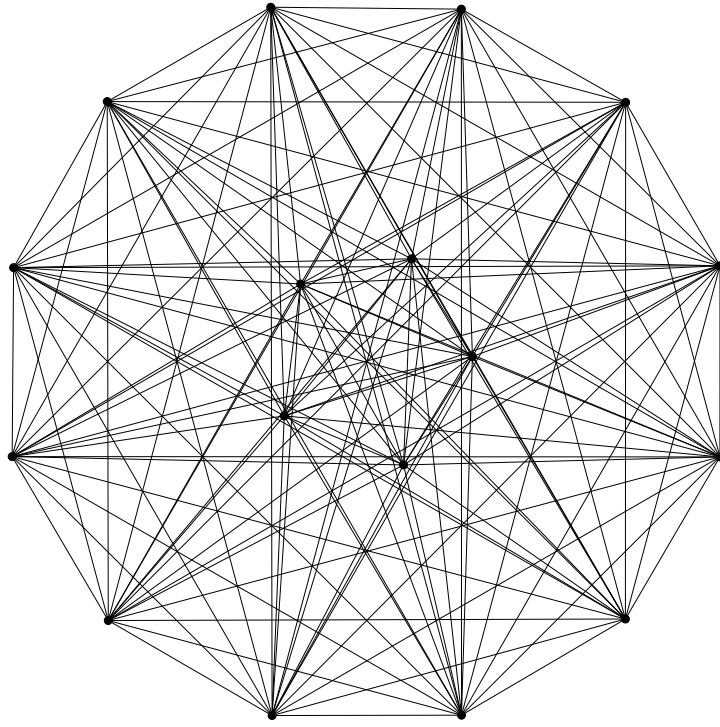


Abbildung A.30. $r_8(17) \leq 12$.

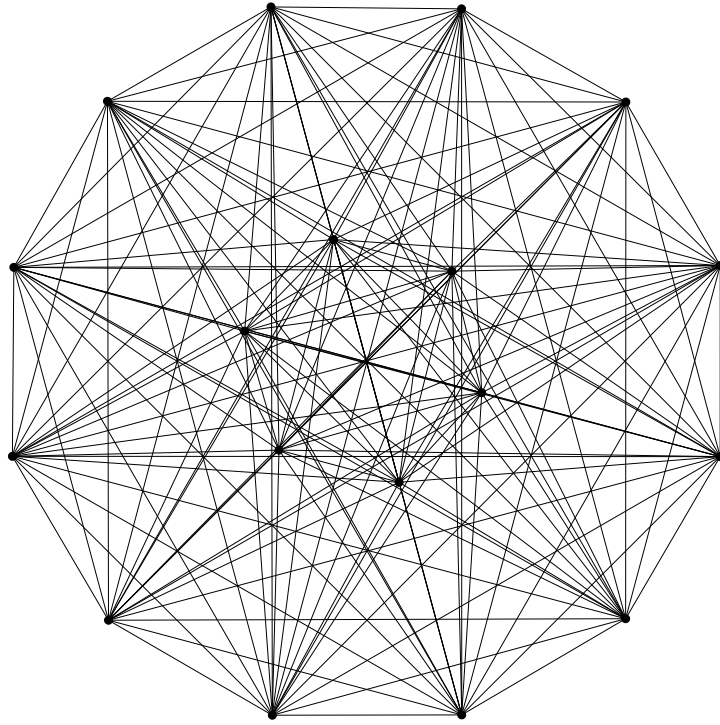


Abbildung A.31. $r_s(18) \leq 12$ für $s = 8, 9$.

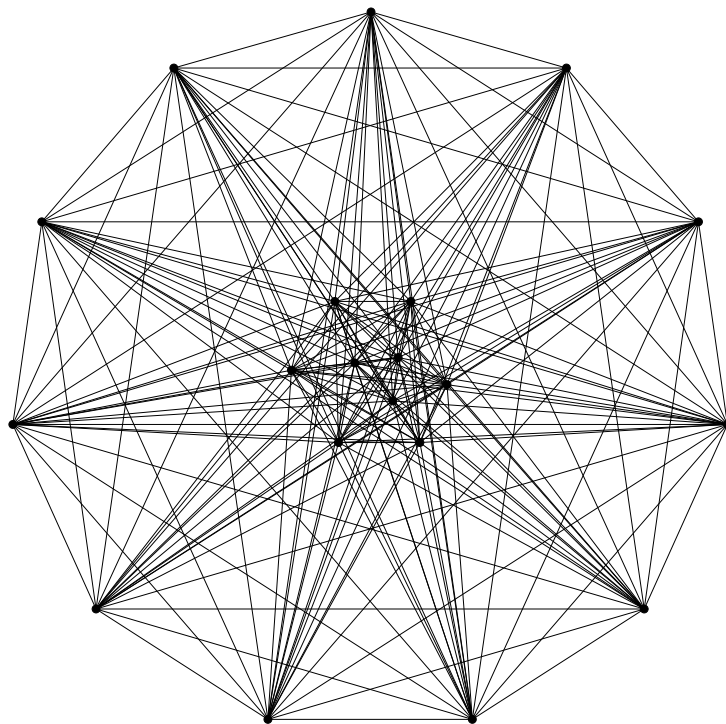


Abbildung A.32. $r_8(20) \leq 11$.

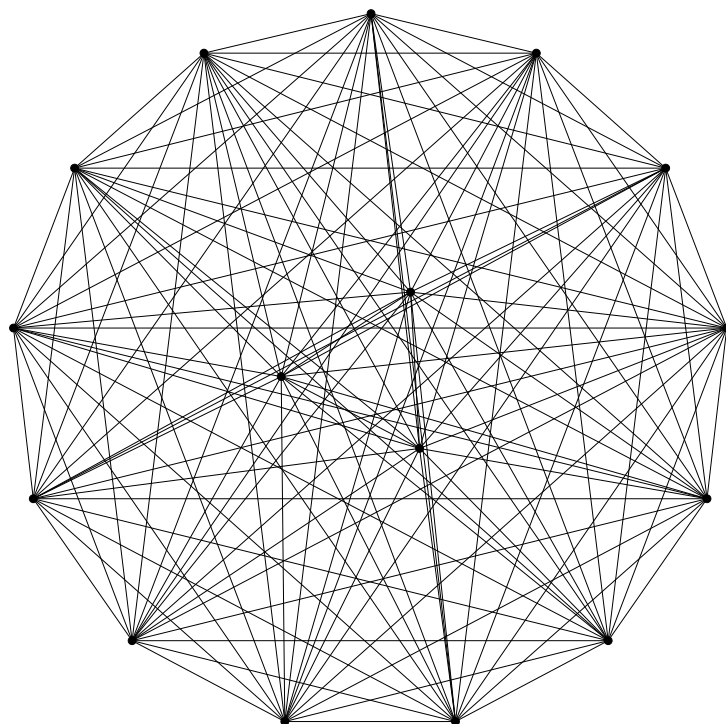


Abbildung A.33. $r_9(16) \leq 13$.

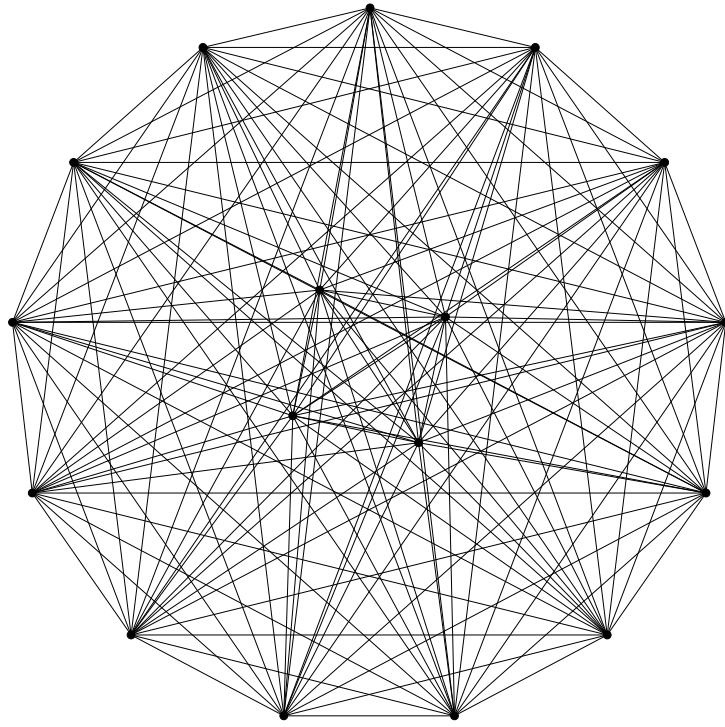


Abbildung A.34. $r_9(17) \leq 13$

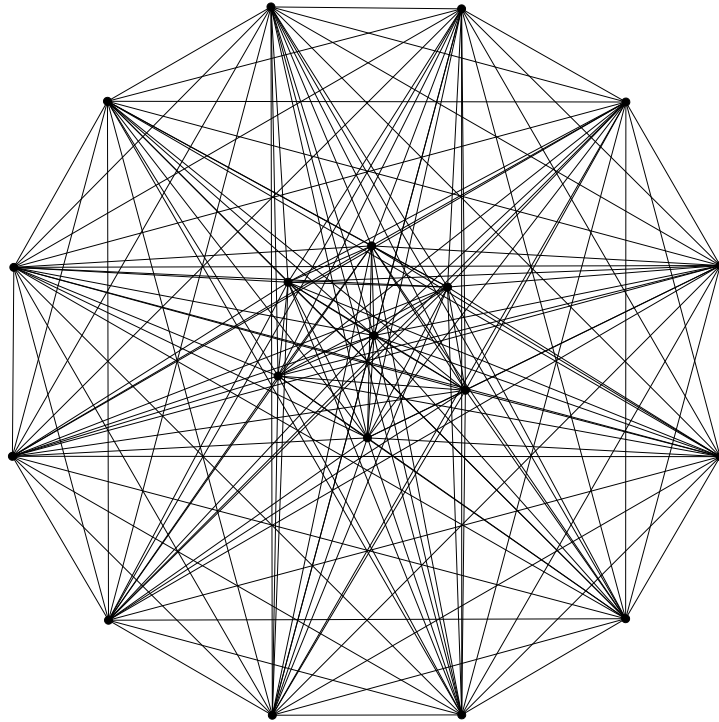


Abbildung A.35. $r_9(19) \leq 12$

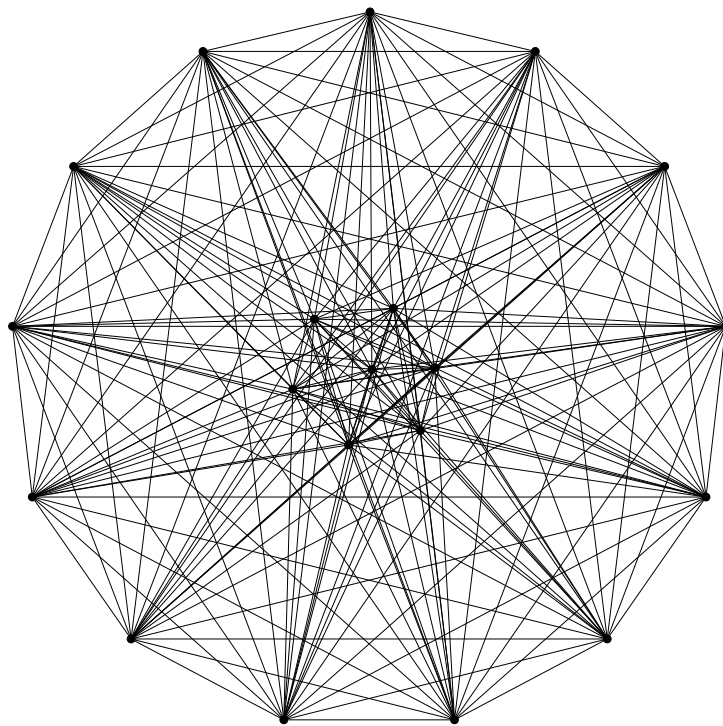


Abbildung A.36. $r_s(20) \leq 13$ für $s = 9, 10$.

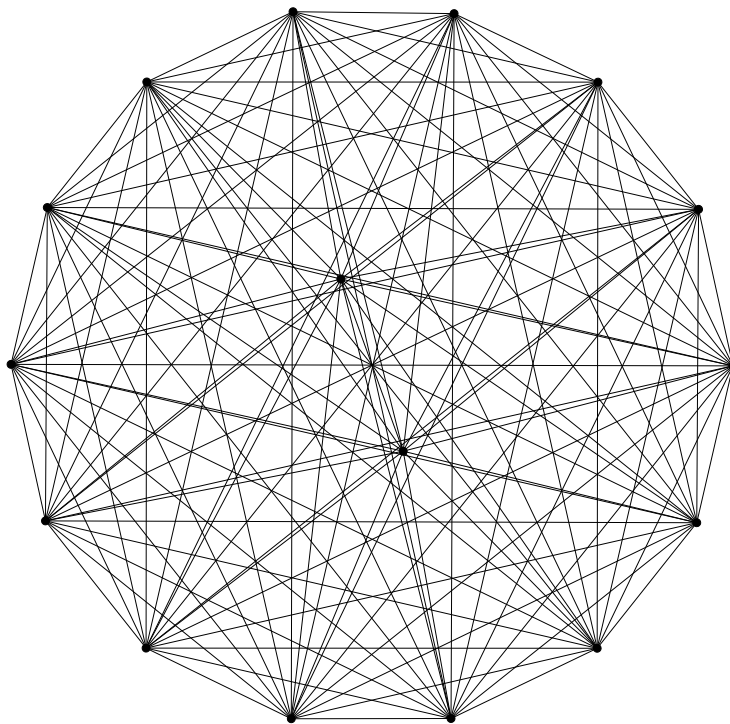


Abbildung A.37. $r_{10}(16) \leq 14$

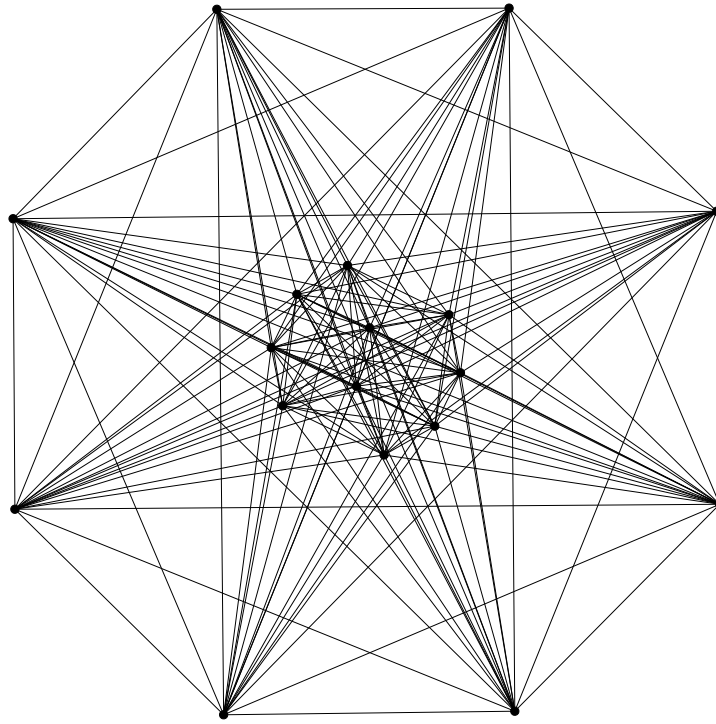


Abbildung A.38. $r_{10}(17) \leq 14$

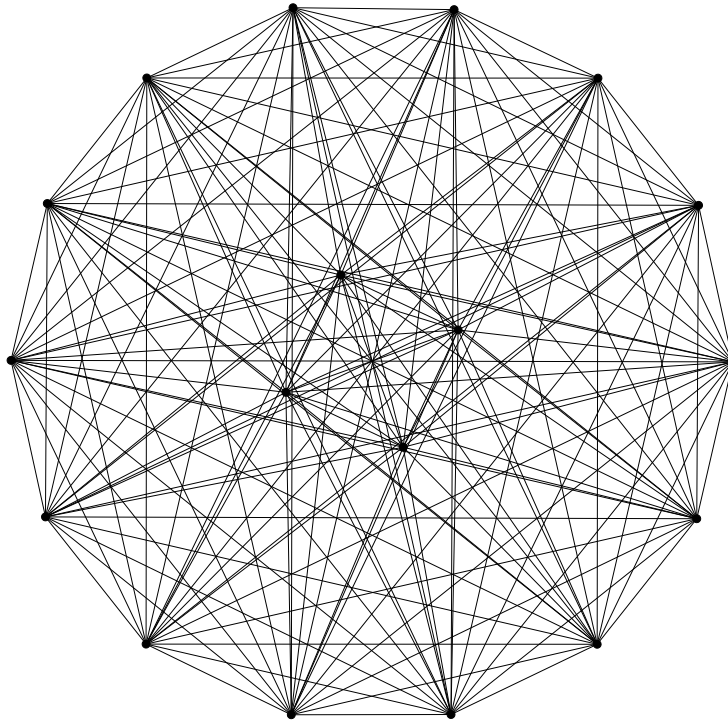
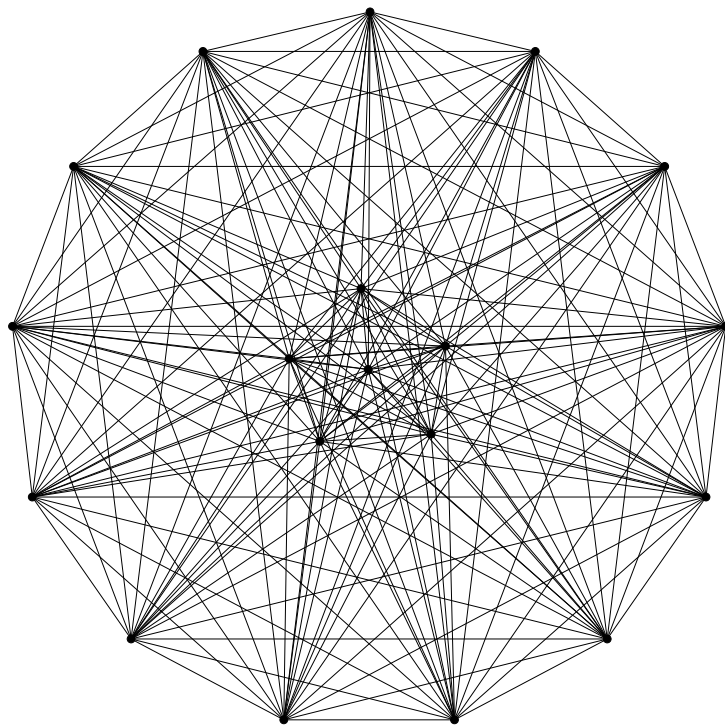


Abbildung A.39. $r_{10}(18) \leq 14$

Abbildung A.40. $r_{10}(19) \leq 13$

Literaturverzeichnis

- [1] BEINEKE, L. W. UND WHITE, A. T.: *Topological graph theory*. In: L. W. Beineke, R. J. Wilson (eds), *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press (1978), 15–49.
- [2] BERGMANN, H.: *Die maximale Anzahl von Überschneidungen bei einem Polygon*. Arch. Math. **20** (1969), 107–112.
- [3] ERDŐS, P. UND GUY, R. K.: *Crossing number problems*. Amer. Math. Monthly **80** (1973), 52–58.
- [4] FÁRY, I.: *On straight line representations of planar graphs*. Acta Sci. Math. (Szeged) **11** (1948), 229–233.
- [5] FURRY W. H. UND KLEITMAN, D. J.: *Maximal rectilinear crossing of cycles*. Studies in Applied Mathematics **56** (1977), 159–167.
- [6] GRONAU, H.-D. O. UND HARBORTH, H.: *Numbers of non-isomorphic drawings for small graphs*. Congr. Numer. **71** (1990), 105–114.
- [7] GUY, R. K.: *A combinatorial problem*. Nabla, Bull. Malayan Math. Soc. **7** (1960), 68–72.
- [8] GUY, R. K.: *Crossing numbers of graphs*. Lecture Notes in Math. **303** (1972), 111–124.
- [9] HARBORTH, H.: *Parity of numbers of crossings for complete n -partite graphs*. Math. Slov. **26** (1976), 77–95.
- [10] HARBORTH, H.: *Crossings on edges in drawings of complete multipartite graphs*. Colloquia Math. Soc. János Bolyai. Combinatorics, Kesztheley (Hungary) 1976 **18** (1978), 539–551.
- [11] HARBORTH, H.: *Darstellungen von Graphen in der Ebene*. Graphen in Forschung und Unterricht, Festschrift K. Wagner, Herausgeber: R. Bodendiek, H. Schumacher, G. Walter. Verlag Barbara Franzbecker 1985, 54–64.
- [12] HARBORTH, H.: *Darstellungen des vollständigen Graphen ohne Kanten mit wenigen Kreuzungen*. 33. Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau 1988, Heft 4, C2, Graphen und Netzwerke — Theorie und Anwendungen, (1988), 179–181.

- [13] HARBORTH, H.: *Drawings of the cycle graph*. Congr. Numer. **66** (1988), 15–22.
- [14] HARBORTH, H.: *Maximum number of crossings for the cube graph*. Congr. Numer. **82** (1991), 117–122.
- [15] HARBORTH, H. UND MENGENSEN, I.: *Edges without crossings in drawings of complete graphs*. J. Comb. Theory (B) **17** (1974), 299–311.
- [16] HARBORTH, H. UND MENGENSEN, I.: *Edges with at most one crossing in drawings of the complete graph*. In: R. Bodendiek, R. Henn (eds), Topics in Combinatorics and Graph Theory, Physica-Verlag (1990), 757–763.
- [17] HARBORTH, H. UND THÜRMANN, C.: *Minimum number of edges with at most s crossings in drawings of the complete graph*. Congr. Numer. **102** (1994), 83–90.
- [18] HARBORTH, H. UND THÜRMANN, C.: *Numbers of edges without crossings in rectilinear drawings of the complete graph*. Congr. Numer. **119** (1996), 79–83.
- [19] JENSEN, H.: *An upper bound for the rectilinear crossing number of the complete graph*. Journ. Comb. Theory (B) **10** (1971), 212–216.
- [20] KLEITMAN, D. J.: *The crossing number of $K_{5,n}$* . J. Comb. Theory **9** (1970), 315–323.
- [21] KURATOWSKI, C.: *Sur le problème des courbes gauches en Topologie*. Fund. Math. **15** (1930), 271–283.
- [22] MADEJ, T.: *Bounds for the crossing number of the n -cube*. Journal of Graph Theory **15** (1991), 81–97.
- [23] MENGENSEN, I.: *Darstellungen des vollständigen Graphen ohne kreuzungsfreie Kanten*. Diplomarbeit, TU Braunschweig, 1973.
- [24] RINGEL, G.: *Extremal problems in the theory of graphs*. In: M. Fiedler, Theory of Graphs and its Applications, (Proc. Symposium Smolenice, 1963), (1964), 85–90.
- [25] STEINITZ, E.: *Polyeder und Raumeinteilungen*. Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Band 3 (Geometrie), Teil 3AB12 1922, 1–139.
- [26] WAGNER, K.: *Bemerkungen zum Vierfarbenproblem*. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **46** (1936), 26–32.